符号付き体積って？　行列式の絶対値

1　前書き

行列式とは何か。学部の線形代数とかいう授業において、行列と行列式なるものを習う。行列というのは線形写像の表現であるというのが最も一般的な理解であろう。そして行列式は正方行列に対して定義される関数である。それはその行列が定める線形写像による体積の拡大率を表す、という説明を受けることが多いように思う[1]。

ともあれ平行体の体積であれ、写像の拡大率であれ、それは行列式の「絶対値」がそれを表しているということであった。向きというよく分からない言葉を導入し、符号が負になっている状況では向きが基準のものと異なると説明されるのである。

向きとは何か？それについてここで深く考察することはしないが、線形変換という言葉との関連で言えば、線形変換であることを保ちつつ連続的に変化させることで写り合う線形変換同士を同一視したい、という見方をするときがあるということだと思う。すなわち $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の連結成分を向きと呼ぶ、ということであろう。

疑問と言うにはやや漠然としたものだが、行列式を習ったときこういう風に感じたことはないだろうか：今いる空間と鏡に写る空間とは何かが違っているのは確かだし、それに名前を付けるのはやぶさかではない（“ 向き ”という名称が妥当かは別として）。でも向きは体積とは直接は関係ない概念のような気がするし、それらをひとまとめにするのではなく、体積の変化率のみを直接的に記述するような概念はないのか？と。

もう少し数学的に言い直すなら「行列式の絶対値」を絶対値という言葉を使わずに直接的に定義することはできないのか、という感じのもやもやであろうか。

絶対値は符号による場合分けを行う関数である。拡大率という“ 素直な ”概念の定義に場合分けを経由する関数を用いるということへの違和感もあるのだと思う。

本ノートの目的は「行列式の絶対値」の行列式や絶対値を経由しない形での特徴付けを紹介することである。

なお主定理を含む本ノートの大半の部分は、私が学部時代に友人と“ 卒論 ”と称して作ったノートの内容であることをお断りしておく。

2　「行列式の絶対値」の特徴付け

行列式の絶対値の特徴付けを与えたい。どうするか。とりあえずよく知られている行列式の定義を振り返ってみよう。

まずは多項式としての明示式である。$X=(x_{ij})_{i,j=1}^{n}\in\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ に対し

$$|\det X|=\left|\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n}x_{i\sigma(i)}\right|$$

となった。ここで S_n は集合 $\{1,\dots,n\}$ の自己全単射の全体を表す。うーん … これを絶対値を使わずに明示式で書くことは厳しそうだ。

[1] 蛇足であるが、体積が 1 の最も典型的な立体である標準基底の張る立方体を基準として、それが写った先の平行体の体積を見る、ということもできる。先々のことを考えれば写像による体積の変化率という見方の方が、基底のとり方などの恣意的なものに依存しないなどの観点からも好ましいと思う。が、写像という抽象的な対象に言及せずとも「与えられたベクトルの張る平行体」という実体のあるものの体積を直接的に考えても行列式と本質的に同じものが考察の対象として現れていることを指摘しておきたい。

$\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ に標準的な微分構造を入れると $|\det X|$ は微分不可能である。なので微分不可能な関数をどこかで経由することは不可避である。微分不可能な関数の明示式の中には場合分けを用いないものも世の中にはあるにはあるだろうが、"自然な表示" からはどうしても離れていってしまう気がする。こちらからのアプローチは（少なくとも一旦）あきらめよう。

もう一つ、よく知られた行列式の特徴付けとして次のようなものがあった：

$\varphi : \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ が次の条件をみたすならば $\varphi(X) = \det X$ である。ただし $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n$ に対し、$x_i = (x_{ij})_{j=1}^n$ とし、$X = (x_1, \ldots, x_n)$ のように書く。

- (線形性) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ および $x, y, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\begin{aligned}&\varphi(\alpha x + \beta y, x_2, \ldots, x_n)\\ =&\alpha\varphi(x, x_2, \ldots, x_n) + \beta\varphi(y, x_2, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

- (交代性) $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ および $\sigma \in S_n$ に対し

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = -\mathrm{sgn}(\sigma)\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

- (規格性) $e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とすると

$$\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

さて、行列式の絶対値についてこの特徴付けの類似を得ることはできるであろうか？規格性はそのまま成り立ち、交代性は列を入れ替えても値が変わらないという対称性に変わる。しかし安直に考えると多重線形性は $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し

$$\varphi(\alpha x + \beta y, x_2, \ldots, x_n) = \pm\alpha\varphi(x, x_2, \ldots, x_n) \pm \beta\varphi(y, x_2, \ldots, x_n),$$

というような条件になり、符号が（両方負になることはないので）3 通りのパターン発生する。

どうすればいいだろう？

$\cdots$ と、その前にちょっと待て。行列式は退化していると値が 0 になるという性質があった。上記の線形性もどきからこの性質は導かれるのだろうか？すぐには分からないが、基本性質として付け加えたいくらいの性質である。

$\cdots$ そう考えると、他の行を加えるという操作は符号による場合分けとかも全然なく、とても簡単な条件ではないか。

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

そのような考えを突き詰めて整理すると次のような条件に行き当たり、そしてそれは行列式の絶対値という関数を与えるための十分条件にもなるのである。

定理 2.1. $\varphi : \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が次の条件をみたすならば全ての $X \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ に対して $\varphi(X) = |\det X|$ となる。

1. $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2, x_2, \ldots, x_n) = \alpha\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2. $\sigma \in S_n$ および $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

3. 標準基底 $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\varphi(\pm e_1, \dots, \pm e_n) = 1. \qquad \text{(復号自由)}$$

なぜこれで値が定まるかと言うと、「掃き出し法で計算できるから」である。

行列のランクが最大の場合には単位行列の場合に帰着できる。例えば

$$\begin{aligned}\varphi\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} =& \varphi\begin{pmatrix} 3+\frac{3}{5}2 & 2 \\ -3+\frac{3}{5}5 & 5 \end{pmatrix} \\ =& \varphi\begin{pmatrix} \frac{21}{5} & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ =& \frac{21}{5}5\varphi\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ =& 21\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ =& 21\end{aligned}$$

のように値が求められるわけである。

行列が退化している場合には掃き出し方の途中で 0 ベクトルが現れる。そのときの値は (1) の $\alpha = \beta = 0$ の場合として

$$\varphi(0, x_2, \dots, x_n) = 0$$

であることが分かる。そのためどのような場合でも値が定まるわけのである。

3 まとめ

場合分けを一切使用しない条件により行列式の絶対値を特徴付けることができた。絶対値という、場合分けを使って定義される関数を経由して記述される関数に対してこのような特徴付けが与えられるというのは驚くべき結果のような気がしなくはない。

何はともあれ、これほどきれいに書ける条件で定義されるものであれば、これをもとにして数学（幾何学や解析学？）を展開することができそうな気がしないだろうか。まあ、明確な根拠はない荒唐無稽な発想はであるが。

向きの情報を込めた行列式、というかそれと同様の思想と言える交代多重線形形式の先には微分形式という幾何学的・解析学的に重要な概念が待っている。

例えばストークスの定理は閉曲面で囲まれた領域での積分が、その境界での積分に置き換わるという結果であった。これは微分形式の向きと境界の多様体の向きとが一致する部分と反転している部分がうまく打ち消し合って、残りの部分が領域の内部での微分の積分になるという現象であった。符号が付いていることが非常にうまく働いているのである [2]。

向きの情報のない概念を基礎におく理論というのはこういう現象を作り出すことはできない。$dx \wedge dy$ を球面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ で積分すると、南半球と北半球で打ち消してしまうが、$|dx \wedge dy|$ えであれば xy 平面への射影 2 つ分の面積が現れる。

[2] この事実は何となくは広く知られていると思うが、この現象のきちんとした像を描けている人がどのくらいいるのかは疑問である。そのうち別のノートで解説を書いてみたいことの一つである。

真上から降り注ぐ光が 2 重に遮られて光量の減少量が平面全体でこれこれになった、みたいなものを計る幾何学であろうか。行列式の絶対値の先に続く数学があるとすればそんな感じの何かかもしれない。
という漠然としたボヤキを漏らして、本ノートを終わりにしたい。

公開	初版	2016 年 3 月 4 日　公開
	第 2 版	2017 年 9 月 24 日　公開
著者	河下希	
公開場所	邪道数学研究所	
	http://cubicsphere.web.fc2.com/index.html	