　１　２　３　４　５　６　７　８　９　１０　１１……

ノートを開くと、そこは数字で埋め尽くされていた。

　……２５　２６　２７　２８……

あらぬところで線がとび出し、筆圧も不安定。なんともへたくそな文字だ。字と字の間隔もバラバラで、ラインも乱れて上下に波打っている。遠目に見ると無造作に書き散らされたようにすら見える。

　……４０　４１　４２　４３

ここで１ページ目は終わっている。

　４４　４５　４６　４７……

ページをめくるとさらに続く。少しずつ大きくなっていく、数。次のページも、その次のページも。

　……２１８　２１９　２20　２２１……

どんどん大きくなる。ページが進むにつれて、字の形が少しずつ安定してくる。

　……５２１　５２２　５２３　５２４……

１つずつ大きくなる、数。ページが進むにつれて、上下の波打ちはおだやかになり、ノートの線に合うように書かれるようになる。文字の間隔も、だんだん一定になっていく。

　……１８２８　１８２９　１８３０　１８３１

最後のページ。ここでこのノートは終わっていた。ノートを閉じて、次のノートを開く。

　１８３２　１８３３　１８３４……

次のノートにもひたすら記されている。１ずつ大きくなっていく、どこまでも続く、数。

目 次

序章　はじまりがクライマックス

1　新しい高校

1.1　入学式

春。別れと出会いの季節などと形容されることもある。身も蓋もない言い方をすれば、年度の変わり目で自分を取り巻く環境が大きく変化することが他の時期よりも多いという、現代社会のありようから生まれた表現だろう。

本庄建也（ほんじょうたつや）という名前を付けられた僕も中学を卒業し、今年度から高校に進学する。僕自身を含め中学校での学友たちのほとんどは引っ越しなどするわけもなく、雨露をしのぐための生活拠点は狭い学区の中に構えたままではあるが、多くの学友とは顔を合わせる機会が確実に減るだろう。

高校生活最初のイベント、入学式。

新入生のために体育館にずらりと並べられたパイプ椅子。自由席とのことだったので近所に住む幼なじみの同級生と共に隅の方の空いている席に適当に座った。僕の隣に座っている、肩にかかる髪を後頭部でまとめた彼女の名前は楠乃舞花（くすのまいか）。同じ中学からこの高校に進学した、あまり多くはない同級生である。

ちなみに入学式だからといって桜なんてものは咲いてもいなければ散っていくところでもない。あれは日本の中心を自負している地域とかでしか巡り会えない現象だろう。この辺りで出会いと別れの季節の象徴になるのは、嵐すら連想してしまうような強い春風と、甘やかな梅の香りだ。

季節の象徴はさておき、今日は快晴。入学式という節目をこういう日に迎えられたのは純粋にうれしい。屋内で催されるとは言え窓から差し込む暖かな光があるのとないのとでは大違いである。

しかし天候に恵まれたと言っても入学式の式次第が変わるわけはなく、ひたすらに偉い人のあいさつを聞き続けるだけの時間である。退屈だし当然の流れとして、僕も物思いの一つくらいするのは当然の流れと言えるだろう。

などともったいぶってみたが、このときの僕がこれと言ったおもしろいことを考えていたわけではない。入学式前の受付でもらった学校紹介。式の会場で着席してから開会するまでの間にパラパラと見ていたその内容を思い返していただけである。

犬里（いぬさと）町立犬里高等学校。地域のコミュニティとも積極的に交流を図り、勉学に限らない多種多様な形の学びの場を提供することを目指す学校。学びの提供対象は生徒のみならず地域住民、そして教員も含まれるらしい。全ての人が学びの場を互いに提供し合える関係を目指している、のだそうだ。

具体的な取り組みとして商店街や町工場での職場体験、町民と生徒で作る数々の合同サークル、放課後の学校施設の外部の人たちへの解放、などなどが紹介されていた。

僕の家から犬里高校までは電車とバスを乗り継いで一時間くらいの時間がかかる。それくらい離れると噂なんて届かないものなのだろうか。今日パンフレットを見るまで全く知らなかった。

などということをぼんやりと考えているうちに、式次第が終了した旨のアナウンスが聞こえてくる。

「受付でお渡ししたクラス分けと教室配置図にしたがって各自、自分の教室へ移動して下さい」

アナウンスを合図に体育館中から一気に音があふれ出す。椅子の鳴る音、緊張を解いたため息。僕と舞ちゃんのように知り合い同士で来てる人も結構いるのだろう、話し声もちらほら聞こえてきた。

新入生たちの作る流れに乗って僕たちは校舎へと移動する。

「じゃあ僕はここで。ホームルーム終わったら校門のとこでね」
「うん！　じゃあまた後でね」
僕の名前はクラス分け表の一年七組にあった。舞ちゃんの名前は四組に。体育館から近い七組の教室の前で幼なじみの少女と別れに別れを告げて、いよいよ知らない人だらけの新しい教室に入っていった。
教室の前方には座席表が黒板の一面を端から端まで余すことなく使って大きく書かれていた。その指示に従い自分の席に着席する。そして鞄を机のわきに掛けた。
知り合い同士で席が近いということはさすがにほとんどないのだろう。生徒の移動が落ち着いていくと共に、教室内はかすかな物音でも響き渡るような静けさに包まれていった。
手持ちぶさたになるかと思い、鞄から筆記用具と入学式の受付でもらった資料一式を取り出してみる。
入学式の前に読んでいた学校紹介の他、教室配置図、敷地内の建物やその他施設の配置図、年間学校行事スケジュール表、ホッチキスで留められた新入生一学年分のクラス名簿、部活紹介。それに、図書館案内？
学校から徒歩五分くらいのところに町立図書館があるらしい。犬里町民でなくてもこの学校の生徒なら利用可能なのだそうだ。政治、文化、経済などの歴史の他、気候や地質、生態系など幅広い方面からの豊富な郷土資料が自慢らしい。
そんな感じに時間をつぶしているうちに、教室の前方入り口に人影が現れる。赤いフレームのメガネをしたシンプルなスーツ姿。成人としてはやや小柄な、腰上までお下げ髪をおろした、頬のラインがふっくらとした女性、だった。
このタイミングで入ってくる、制服でない人物はほぼ間違いなくこのクラスの担任だろう。だが服装を除けば外見は僕たちと同年代のような印象で、同級生がコスプレをしているような、妙なちぐはぐ間がある。そう思ったのは僕だけではないようで、その女性の姿を認めた新しい級友たちに期待や不安とは異なる、微妙な戸惑いが広がっているような気がする。
その女性は教卓に名簿らしきファイルを置くと黒板に大きくこう書いた。

一年七組　担任
石 崎　和 奏

「はーい。みなさんこんにちは、初めまして」
おっとりしたしゃべり方なのだが透き通った響きのその声に思わず意識が引き戻された。
「ここは１年７組の教室です。みなさん、間違いないですか？　……はい！　今日から１年間、このクラスの担任になりました、石崎和奏（いしざきわかな）です。担当教科は数学。甘味屋巡りが趣味です。この街で育って、大学は北海道に出ましたが、先生になるときにこの県に戻ってきました。よろしくね」
石崎先生の声は耳に心地よく残る、とても聞き取りやすい声だった。独特の抑揚があり、一言一句が明瞭に頭の中に入ってくる。
その後、時間割表が配られたり日直当番の順番を決めたりといったクラス内の事務的な連絡がなされた。

1.2　新しい学級

事務連絡が一通り終わったところで石崎先生は一息つき、改めて笑顔を深めて教室を見渡す。
「さて今度はみんなに自己紹介してもらおうか。自分の名前はフルネームで言ってもらうとして、後は自由にアピールしたいことをしゃべってね。じゃあ秋月くんから」
教室の一番左前に座っていた男子生徒が立ち上がり、教卓の前に歩み出る。彼はこちらを振り返り、にこやかに教室を見回した。
あらゆるのものに対して好奇心を示してるみたいな表情が、二桁の年齢になりたてくらいの雰囲気を作っている。

そしてにかっと笑って話し始める。

「みなさんこんにちは！　秋月万樹です。僕は内積が何なのかわかりません」

これが、彼の自己紹介の第一声だった。

「成分ごとに掛け合わせたものを全部足す。それはわかります」

と秋月くんは続け、僕たちに背中を向けて石崎先生が置いたチョークを手に取り、

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

大きな字で数式らしきものを黒板に書き付ける。

「直交したら 0 、それもわかります。でも 0 以外にも 1 とか -2.8 とか、いろんな数になりますよね。その数は二つのベクトルの何を表してるんでしょう？　何か知ってる人、いたらお話ししましょう！　秋月万樹でした」

バラバラと拍手の音が響く中、秋月くんは自分の席に戻っていく。なんだったんだ一体。内積？　ってなんだっけ。

「はい。ありがとう秋月くん。私が数学担当ってことで気を使ってくれた？　みんな、そういうのはなくて良いからね。一番自分らしいのはこれだ！　ってことをアピールしてね。もちろんそれが数学なら逆の遠慮も要らないけどね。じゃあ次は……」

秋月くんのインパクトが強すぎてその後はあまりちゃんと聞いていなかった。

いつの間にか自己紹介は進行していて、僕の名前を呼ぶ石崎先生の声にハッとする。

まずい。何を話すか、何も考えてない。

実際に冷や汗をかきながら僕は教卓の前に出る。

落ち着け。一度深呼吸し、ゆっくりと教室を見回した。知らない人がほとんどだ。

もう一度深く息を吸い、口を開く。

「本庄建也です。数学は言うほど好きではないと思うんですけど、妹の影響でときどき遊びます。円周率がちゃんと決まる理由が知りたいです。……よろしくお願いします」

何を言ってるんだろう。人前で話すのはもともと苦手ではあるが、それにしても自分でもよくわからないことを口走ってしまった。

机に突っ伏したい気持ちを抑えるのに必死で、その後のクラスメイトの自己紹介もあまり頭に入ってこなかった。

あんな自己紹介をしてしまったためなんだろう、ホームルームが終わるや否や、教室の端から秋月くんが真っ直ぐ僕のところに向かってきた。

「俺、秋月万樹。内積がわかんないって自己紹介してた」

「あ、秋月くん。本庄建也です。よろしくね」

「おう、覚えてたぞ。円周率がわかんねって言ってたよな」

第一印象そのままに、非常にハキハキとしゃべる子だ。好奇心旺盛な子どもという表現がぴったりくる、活き活きとした表情をしている。

「う、うん。まあ。緊張して自分でも何言ってるんだろうって感じだったけど」

僕としてはそんなキーワードを言うつもりは全くなかった。変なイメージが定着する前にうまく修正をしたいなと考えを巡らせていたのだが、秋月くんの次の言葉にその思考は中断させられた。

「そんなこと言うくらいなんだから、数学好きなんだよな。なあ、俺と一緒に数学部の見学行かないか？　今日からもう部活動、始まってるらしいぜ」

数学部なんて部活があるのか。二つ返事で乗っても変なイメージを加速するだけかもしれないが、行ってみても良いかもしれない。もともと部活はいろいろ見学してみようと思っていたし、数学ならあいつへのみやげ話にもなるかもしれないし。でも一旦は保留だ。だって、

「ごめん、今日は一緒帰る約束してる人がいるんだ。また誘って」
「そうか。わかった、じゃあまたな」
窓から校門を見るとすでに舞ちゃんがそこにいた。こちらに気付き、大きく手を振ってくる。
彼女に軽く手を振り返し、合流しようと急ぐ。と言っても帰宅する前に教科書を受け取らなくてはいけない。教科書配給所（という名前でもなかろうが正式名称は知らない）で高校三年分の教科書を受け取り一旦教室に戻った。そして適当に入るだけ鞄に入れて、残りは机の中に突っ込んだ後に昇降口に向かった。三年分の教科書って重いな。

1.3 下校

「おーい！　ここ、ここ！」
校舎の影から僕が顔を出すと、舞ちゃんは軽く飛び跳ねながら手を振ってくる。昔からこうだった。手がきれいなので妙に様になっているのがいつものことなら、注目を集めるのをちょっと恥ずかしいと僕が感じてしまうのもいつものことである。
「お待たせ」
僕たちは学校最寄りの駅である犬里駅に向かって歩き出す。
高校と駅の間には築数十年という木造の民家・商店もあれば近代的な鉄筋コンクリートの雑居ビルもある、新旧入り乱れた街が広がっている。
都市計画としてお役所が指揮を執って開発したという感じではなく、道もまたその場その場で必要なものを通したという感じで非常に入り組んだ街である。
土地勘のある人ならいろんな所を通り抜けられて便利らしいのだが、僕たちのようなよそ者は油断するとすぐ迷子になる。
微妙なカーブが多くて方向も見失いやすいし、駅の裏山から流れ出す数々の用水路に橋が架けられていないところもあるようで、適当に進むと袋小路に何度も突き当たったりもする。
実は学校と駅を結ぶ線から少しずれたところに県道がある。そちらに回れば道はわかりやすいのだが、ちゃんと抜ければ街を通る方が近いので、午前授業の暇なうちにきちんと道を覚えてしまいたかった。
「たっくんのクラス、ずいぶんホームルーム長かったよね」
言うまでもないとは思うが、たっくんというのは僕のことだ。「たつや」の頭文字である。楠野家の人たちはみんな僕をそう呼ぶ。
「自己紹介がね、盛り上がってたっぽい」
と答えたものの、詳細はあまり憶えていないのだが。
「ふーん。４組はみんな一言二言だったよ」
「そうなんだ。こっちはみんな一分くらいはしゃべってたなあ」
内容はほとんど頭に入ってなかったが、これは本当だ。みんな教卓の前に出ていたし、一言ですぐに引っ込むという感じの人はほぼいなかったように思う。
「そうなんだ。おもしろい人いた？」
道順を確かめながら僕たちは会話を続ける。
「あー、出席番号１番の子のインパクトが強くてね」
秋月くんの自己紹介の様子を伝えた。ついでに、それにつられて（？）やらかした僕の自己紹介と、部活見学に誘われたことも多少脚色して話してみる。
「へえー。その秋月くんも強烈だけどさ、でもたっくんの自己紹介も似たようなものじゃない？」
「そうかなあ」
ただしどろもどろになってただけの僕と、きちんと自分なりの伝えたいことがあった（ように僕は感じた）秋月くんとを同列に並べるのは何か違う気がするけれど。

そんな趣旨の反論しているうちに、僕たちは犬里駅に到着する。

ここでも一つ、新学期的な仕事がある。出会いと別れの季節は何かと忙しい。

僕たちは入学式前の受付でもらった通学証を持って窓口に並んだ。

長蛇の列とは言わないが、片手では足りないくらいの人が順番待ちをしていた。ほとんどの人が僕たちと同じ制服に身を包んでいる。

一人、また一人と窓口を離れていき、僕の番がやってくる。

「猫川（ねこがわ）駅までの６ヶ月定期をお願いします」

通学証と生徒手帳を窓口の人に見せる。

係の人は通学証と生徒手帳の記載事項を一つ一つ確認し、チェックを付けていく。今日だけでも何十人と受け付けた作業なんだろう。慣れた手付きや目線の動きを見て、なんだか格好いいと思った。働く人、って感じだ。

代金を支払い、生まれて初めての通学定期を手にする。

毎日ちょっとだけ遠出をする生活が始まる証。なんとなく誇らしい気分になる。

隣の窓口で舞ちゃんも無事定期を購入できたようだ。はにかんだように僕のところに駆け寄ってくる。

舞ちゃんも僕のように、何かを感じているのだろうか。合格発表のときや入学式のときにすらそれほど感じなかった、新しい生活への期待と不安。

しばらく待合室で談笑し、電車の接近を知らせるアナウンスが聞こえたら買ったばかりの定期を改札で提示し、僕たちは車両に乗り込んだ。

考えてみれば当たり前だが、電車はかなり混んでいた。僕たちのような電車通学の犬里高生は、今日はこの時間に集中しているのだろう。

ホームや改札外に分散していた人が狭い車内に集められて一気に窮屈に、そしてにぎやかになる。

「たっくんは数学部に興味あるの？」

「見学に行ってみようとは思ってるよ。秋月くんもおもしろそうな人だし、あいつへのみやげ話にもなるしね」

あいつ、僕の２つ下の妹の雪菜は“数学”はとても好きなのだ。もちろんあいつの思う数学と犬里の数学部の活動内容が一致するのかはわからないが。

「ゆきちゃんかぁ、確かにねー……」

思うところがあるのだろうか、思案するように微妙な表情を浮かべる舞ちゃん。

「舞ちゃんは何か部活考えてるの？」

話題を変えようと問いかけると、

「ゆーれいになれる運動部！」

という返事が瞬時に返ってきた。今は制服を着ている舞ちゃんだが、服装に選択肢があるときはいつだってジャージを着ているジャージマニアなのである。

……つまり学校でもジャージ姿でいる口実が欲しいと？

「ずいぶん不純な動機だね」

「まあねー」

僕たちはそろって破顔した。

僕たちは家の最寄り駅で電車を降り、今度はバスの定期を買った。こちらは３ヶ月ごとに更新しなければならないらしい。

電車に引き続きバスにも揺られて、ようやく家にたどり着く。通学にかかる時間はすごく長くなるな、と改めて思った。

「じゃあ舞ちゃん、また明日」

「じゃあね。バイバイ！」
舞ちゃんが斜向かいの家に入っていくのを見届け、僕も自分の家の玄関をくぐった。

1.4 入学式からの帰宅

「ただいま」
家の中に向かって声をかけ、かがんで靴紐をほどく。
「おかえりなさい、兄さん」
「ただいま、ユキ」
頭上から降ってくる声に改めて帰宅のあいさつを返して靴を脱ぐ。そして三和土(たたき)に上がって家の中を振り返った。
出迎えてくれたのは先ほどの声の主、今年中学二年生になる僕の妹の雪菜である。僕（１５歳男子の平均よりやや低め）より頭一つ分は低い身長。今日は膝に届きそうな長さの、くせのない髪を後ろで簡単にまとめていた。
２人で並んで居間へと移動する。
ユキの歩く姿は長い髪すらまるで揺れを感じさせない。僕の妹の立ち居振る舞いは、一つ一つ気配がとても希薄だ。
「ご飯食べるよね」
「うん、すぐできる？」
「お味噌汁だけ温め直す。五分はかからないと思うの」
ユキは小学校中学年から不登校になり、現在は家と図書館を中心とした生活をしている。
僕が自分の部屋に鞄を置いて私服に着替えている間に、ユキは昼食を食卓に並べ終えていた。
白米に具だくさんの味噌汁、さばの塩焼き、ほうれん草のおひたし、冷や奴、それにがんもと根菜の煮物。今日は和食らしい。作りたてのつややかな品々が食欲をそそる。
「お、なかなか豪華だね」
僕たちはいつも食事をするときのように向かい合って座った。
「「いただきます」」
僕はまず煮物に箸を伸ばす。
「おいしい。また腕を上げたね」
と僕が言うとユキは微かに頬をゆるめた。
「ありがとう。煮物は火を通す時間が大事なの」
ユキは昼間不在の両親に代わって我が家の家事をほぼ一手に担う主婦でもあるのだ。貪欲に知識を吸収しようとする性格が発揮され、メニューのレパートリーも、一つ一つの料理の質も、どんどん上がっている。
「ところで兄さん、高校の登校初日はどうだった？」
箸を動かしながらユキは何気ない口調で訊ねてくる。
そうだ。秋月くんのこと、こいつの意見を聞いてみよう。
「クラスの自己紹介で内積がわかんないって言い出した子がいてさ」
顔を上げるユキ。少しの間の後、小鉢を手に取りながら先を促され、僕は話を続ける。
「僕も自己紹介で円周率がどうのって言っちゃってね。そのせいか、その子に数学部ってとこに誘われたんだ。後日一緒に行こうってことになった。あ、このさばおいしい」
「今朝買ってきたの。やっぱり魚は鮮度が命なの。
犬里にはそんな部活があるんだ。どんなとこなんだろ」
「うーんどうだろう。部活紹介に何か載ってるかな。入学式前にいろいろ資料もらってさ。その中に部活案内があったから後で見てみようか」

なめこに人参。味噌汁の具を食す。
「兄さんを数学部に誘った人、内積がわからないってのは、幾何学的なイメージがつかめないってことなのかな？」
「ん、わかんない。直交はともかく他の値は意味がよくわからない、みたいなこと言ってたけど。それ以前に僕は、内積って何だっけ？って状態だよ」
「そうなの。なら多分幾何学的なイメージがわからないので合ってると思うの。内積はそんなに難しいものじゃないから、後でまた説明するね」
内積って確かベクトルの話だったっけ。前にユキから断片的に聞いた記憶はあるのだが、内容はすっかり忘れている。というか理解していなかったと思う。

ユキは昔からすごく頭の良いやつだった。ほんとに昔から、それこそ物心付くか付かないかの頃から既にどんなことでも理解が早い子だったのだが、それがより顕著に表れたのは不登校生活が落ち着いてきた頃である。
雑多なジャンルの本を図書館で読み漁っていた、当時小学生のユキ。その中でも特に数学がおもしろかったらしく、（そして本人はどう思ってるか知らないが才能もあったらしく、）少しずつその方面に重点を置くようになっていった。
内容もレベルも雑多に混ざった書籍群にさらされる中で、年不相応の専門書も読みこなしていたように僕には見えた。
ユキ自身は、本の内容をほとんど理解できていないといつも言っている。だがあの本のどの章にこんなことが書いてある、みたいなことを日常生活の中で結構言っているので、ある種の謙遜だと僕は思っている。

そんなユキにときどき数学を教えてもらうことがある。
やはりこいつには秋月くんの自己紹介に思うところがあったのだろうか、ユキは半ば独り言のように話し続ける。
「内積の意味がわからない、もっともな疑問なの。私も変な定義だなって思ってる。同じ成分をかけて全部足すってのは式の形が簡単で、それで直交性が判定できたり、長さを書けたりするなら便利かな、って思って、無理矢理納得したんだけど」
でも、と小さく言ってユキは何かを考え出す。目の色が変わる。こいつがこういう顔をするときには話しかけずにじっと待つ。付き合いの中でそういう接し方に自然と落ち着いた。
少ししてユキはポツポツとつぶやき出す。
「でも、ベクトル空間の内積構造は、有限次元だと双対空間への自己同型と一対一に対応するのね。何かのヒントにはなるかもしれない」
双対空間？　自己同型？
僕に向かって話す口調じゃないから、あんまり気にしなくて良いか。必要なことならそのうち教えてもらえるだろうし。
「それはそうと、円周率って言ってたけど、兄さんはどんな自己紹介したの？」
ユキの目の色が戻り、いつものあどけない表情に戻る。
これと言って具体的なことを言ったわけではなく、しどろもどろになっていただけだ。そう話すと、
「でも言いたいことはあったんだよね」
と話の続きをうながされた。
確かに考えていたことはある。
あのときはとっさのことでちゃんと言えなかったが、今なら言えるだろうか？　こいつは理解力もあるし、こいつ相手なら変に緊張することもない。それに自己紹介のときと違って今はうまくまとめようと時間を気にする必要だってない。

僕は、自分でもちゃんとまとまっていないところもあるんだけどと前置きをして、そのとき言いたかったことをつっかえつっかえ話してみた。

さすがはユキと言うべきか。いまいち要領を得ない説明だったと思うが、質問を挟みつつ話のポイントを整理して、僕の意図を理解してくれていたようだった。

「確かにもっともな話だね。私もその話を初めて聞いたときは、気になったの。でも、ちゃんと考えたことはなかったなあ」

気が向いたら私も何か考えてみるね。ユキのその言葉で会話は途切れ、僕たちは昼食の後片付けを始めた。

昼下がり。僕が自分の部屋で高校の資料や教科書を整理していると、部屋に入ってきていたユキが手元をのぞき込んできた。髪が一房、さらりと肩から零れ落ちる。

「それ、部活案内？」

「ああ、そうみたいだね」

手渡すとユキはパラパラとめくり出す。

「あ。数学部、見つけた。

数学は学校で習うことが全てではありません。学校で習っても良さそうなのに、なぜか教えられないことがたくさんあります。

授業でも扱われて広く認知され、愛されている数学的トピック。その多くはとても素敵なものですからしっかりと鑑賞しましょう♪　でもたまにはそんな日常を離れて、教科書から零れ落ちてしまった、華やかさはないけれど愛すべき世界へ、ワクワクする冒険の旅に出てみませんか？

だって。ずいぶん情緒的な宣伝文句なの」

手元の資料に意識を取られていた僕の生返事には構わずユキは続ける。

「兄さんの円周率の話も、さっきの人の内積の話も、ちょうどこういう話だと思うの。この紹介文を読んで兄さんに声をかけたのなら、その人はなかなかセンスが良さそうだね」

ユキがこれだけ食いついてくるのは珍しい。

こいつは人見知りが非常に激しいのである。親しい人が相手でないと声が出なくなるらしい。図書館に一緒に行ったとき、貸し出し手続きなどを肯定のうなずきと否定の首振りだけで対応している姿を何度か見たことがある。

そのことに対するコンプレックスかどうかはわからないが、他人に関心を持ったときも、そのことをアピールすることに躊躇しているところがある。少なくとも僕にはそう見える。

やっぱりクラスの自己紹介の話をしてよかったな、と内心喜びながら、何気なく手を止めてユキの手元を見ようとした。椅子に座るユキを、僕は床に腰を下ろした状態から見上げることになる。意図せず彼女の脇と腕の間からのぞき見る形になった。見づらいのを察してくれたユキが冊子の開いたページを僕の方に傾けてくれる。

確かにユキが読み上げた通りの文章が書いてあった。

そしてその横に右上がりの階段状にマス目が並べられ、全ての辺に右方向と上方向の矢印が書かれた図が描かれていた。

「そうだ、兄さん。朝買い物に行ったときにショートケーキ買ってきたの。切りの良いところで一緒に食べない？」

資料の整理から意識が離れ始めたとき、ふと思い出したようにユキが提案してきた。区切りがあるほど大した作業でもないが、一息つくには良いタイミングかもしれない。

「わかった。ちょうど休憩したかったところだし、今から食べようか」

1.5　雪菜のベクトル導入講義　前編

僕が冷蔵庫からケーキを出して皿に盛りつけている間に、ユキは紅茶を入れてくれた。

「では、いただきます」

「いただきます。ささやかだけど、入学祝いのつもりなの。兄さん、高校進学おめでとう」

「改めて言われると照れるな。でもありがと、ユキ」

「そうだ、ご飯のときに言ってたベクトルと内積の話をしようか」

ケーキを一口食べたところでユキは急にそんなことを言い出した。こいつは非常に好奇心の幅が広いやつで、どんな話題でも食事中や休憩中でも始めるのである。特に数学の話題になると止まらない。

「ああ、お願いするよ」

僕の方はいつでも込み入った話題に乗れるというタイプではないのだが、こいつ相手には苦痛に感じたことはあまりない。一つには気心が知れて気を使う必要がないというのもあるだろう。ひょっとしたらユキが僕の雰囲気を察して、無理のない範囲に留めてくれているということもあるのかもしれない。

裏に印刷がない折り込み広告を集めた束に手を伸ばし、数枚の紙と鉛筆を手元に置くユキ。

「内積っていうのはね、ベクトルっていうもの 2 つから決まる 1 つの数なの。かけ算が 2 つの数から 1 つの数が決まる、みたいにね。

一番簡単な 2 次元のベクトルで説明するの。

2 次元のベクトルっていうのはね、平面の点のことなの。他の見方もあるけれど」

他の見方もあるけれど。ユキがよく使う言葉だ。

［3 台のパソコン、3 人の男の子、3 回の食事、尺 3 つ分の長さ。3って数はいろんなときに使われるけど、使い方の全部を最初から挙げようとするのは良い姿勢じゃないと思うの。最初は使い方の一つの例をきちっと理解して、でもそれはほんの一例だってことを頭の片隅に置いとくの。違う使い方に出会っても柔軟に対応できる心構えだけは忘れずに、ね。それが理想なんじゃないかな］

かつてそんなことを言っていた。

「あ、でも 2 次元のベクトルよりも前に、1 次元のベクトルから始めた方が良いかもしれないね。と言っても 1 次元のベクトルはただの数で、兄さんも知ってるものなんだけど。

数直線ってあるよね。ずーっと伸びた真っ直ぐな線があって、一ヶ所に印を付けて、そこに 0って数を対応させて原点って呼ぶのね。そこから右にちょっと行ったとこにもう一つ印を付けて、そこには 1 を対応させて。他の点は 0 と 1 の間の長さを基準にして、0 からのずれがどっちの方向なのかと、基準の長さの何倍なのかによって、一つの実数を対応させるんだったよね」

紅茶を一口含みながら学校で習ったことを思い出す。

0 と 1 の間の幅だけ右方向に移動したら、対応する数は 1 増える。移動した距離がその半分だったら 1/2 増えるし、1/3 なら数の増え方は 1/3。同じように右へ移動した距離が基準の長さの a という実数倍なら、対応する数も a だけ増える。

実数 a に対応する点から b だけ左にずれた先の点は、対応する数を x とすると $\overset{b\text{だけ右に移動するともとの点に戻る}}{x+b=a}$ となるようにする。つまり $\overset{x\text{は}a-b\text{になる}}{x=a-b}$。なので $\overset{\text{原　点}}{a=0}$ から b の距離を左に移動した点は $-b$ という負の数になるわけだ。

原点より右は正、左は負。どちらの場合も絶対値は原点から遠ざかるほど大きくなる。

と、こんな感じだったか。

「これがね、1 次元のベクトルなの。1 次元のベクトルっていうのは直線上の点なのね。つまり 1 つの実数で表されるの。

と言うよりも、次元ごとにベクトルと呼ばれるものがあって、次元が 1 の場合はただの実数と変わらない、って言った方が正確かな」

「はあ……本当にただ数直線の説明をしてくれただけだよね」

「うん、確かにそうだね。でもこれが 1 次元のベクトルなの。順番に次元を上げていこうか。次は 2 次元の場合。

さっきも言ったけど、2 次元のベクトルっていうのは平面上の点なの。平面上の点はね、 2 つの実数で表すことができるの。

数直線のときは 1 本直線があるだけだったけど、今度は平面に交わる直線を 2 本引いて、交点を原点って呼ぶの。2 本の直線は直角に交わるように引いとくことが多いね。で、この直線。一つに第 1 軸、もう一つに第 2 軸って名前を付けとくね」

なんとも安直なこのネーミングはユキのものだ。そう言えば x 軸と y 軸、そんな呼び方をすることも多い、みたいなことを前に聞いた気がする。

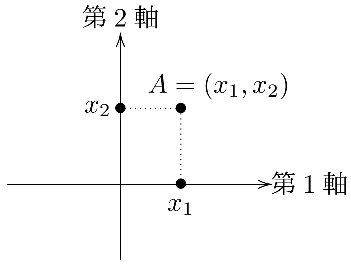
「第 1 軸も第 2 軸も直線だから、その上の点はそれぞれ一つの実数で表されるよね。原点を 0 にして、長さの尺度は 2 本とも同じようにしとくのが普通かな。

直線上の点は一つの実数で表されたけど、平面上の点は二つの実数の組で表すの。どういう数かっていうとね、こういうふうに決めるの。

Aっていう点を決めてね、まず第 1 軸の上を移動して、 $\overset{\text{その点}}{A}$ が第 2 軸の伸びてる方向に見えるところまで行くの。すると第 1 軸の上の一点が決まるよね。ってことは一個実数が決まるよね。これを $\overset{\text{エックスイチ}}{x_1}$ って名前付けとくね。

同じようにね、原点から第 2 軸の上を移動して、 $\overset{\text{目的の点}}{A}$ が第 1 軸の方向に見える場所を探すの。すると第 2 軸の点が一個決まって、その点を表す実数が決まるよね。それには $\overset{\text{エックスニ}}{x_2}$ って名前を付けようかな。

この 2 つの数の組 $\overset{x_1\text{と}x_2\text{を並べて、真ん中に区切りの点と、外にカッコを書いたもの}}{(x_1, x_2)}$ で $\overset{\text{この点}}{A}$ を表すの」



「点を決めれば数の組が決まるし、数の組からもとの点がわかるの。数直線の点と実数のときと同じだね」

ふむ。第 1 軸方向に x_1 移動して、その後に第 2 軸の方向に x_2 移動した場所が $\overset{\text{もとの点}}{A}$ だな。 $\overset{\text{数の情報}}{(x_1, x_2)}$ から $\overset{\text{点の位置}}{A}$ が確かに復元できる。

「平面上の点の全体、それか 2 つの実数の組の全体。お互いに言い換えられるから同じことだね。それが 2 次元のベクトルの集合なの。

集合を定（き）めたら、次はいくつかの演算を定義するの。

足し算、実数倍、それと内積」

いつだったかユキが言っていた。

［演算というのは与えられた物から別のものを作り出す操作のことね］

$\overset{\text{2つの実数}}{a, b}$ から $\overset{\text{その和}}{a + b}$ を作る足し算、 $\overset{\text{積}}{ab}$ を作るかけ算。

$\overset{\text{商}}{a/b}$ は $\overset{\text{除数}}{b}$ が 0 じゃないときにしか作れないけど、 $\overset{\text{そうじゃない}}{b \neq 0}$ のときには 1 個の数が決まる、そういう操作は演算と言ったり言わなかったり。言葉の使い方は人によって、文脈によって多少変わるらしい。

「足し算は 2 つのベクトルから 1 つのベクトルを作る操作なの。定義はこう。同じ成分同士、数として足し合わせてそれを並べるの」

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

○○ := ××という書き方は○○を××と定義する、ってことだっけ。

［○○を××と書くんだって約束事。その場しのぎに長い式を略記したくなるときにも使うみたいだけど、大抵はずっと使い続ける記号を定（き）めるって気持ちかな］

そんなことをかつて聞いた気がする。

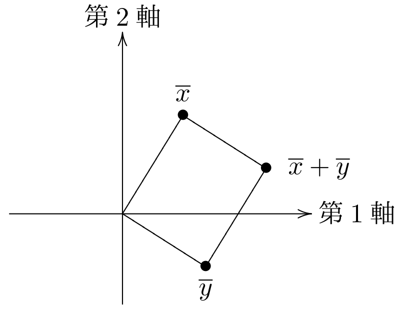
今ユキが書いた式はベクトル同士の和、つまり左辺の“＋”を定義したんだな。右辺の“＋”は実数の足し算だから新しいものじゃなくて、前から僕も知ってた演算だ。文字としては同じでも意味は全く違う。きちんと区別しながら読まなければ。

ベクトルの足し算。

$$(2,3)+(5,-4)=(2+5,3+(-4))=(7,-1)$$

みたいな感じか。

「和は幾何学的にも意味があるの、つまりそれっぽい絵が描けるってことね。原点と結んだ線分を含む平行四辺形の、もう一つの頂点。それがベクトルの和なの」



「一個一個のベクトルを全部2つの実数の組で書いてたら絵がゴチャゴチャするから、一文字に略しちゃうね。今日のところは $\overline{x}$ とか（上に横棒を引いた文字）はベクトルで、何もないのは実数ってことにしとこう。ほんとは一々線を引くのも面倒だけど、慣れないうちは一目で属性がわかるような書き方をしとくのは一案なの。変なとこで混乱しないための、ね。

あ、ちなみに原点、つまり $(0,0)$（両方とも0）のベクトルをゼロベクトルって言うの。今日は $\overline{0}$（0って一文字に横棒を引いた記号）で表そうかな」

「次に実数倍だけどね、これは1つの実数と1つのベクトルから1つのベクトルを作る操作なの。実数を各成分にかけて並べたもの、それが定義なの」

$$a(x_1,x_2):=(ax_1,ax_2)$$

「絵で描くとどうなるのかなあ……あ、こんなかんじかな？」

横と斜めに線を引き、それぞれの脇に“第1軸”、“第2軸”と書き込むユキ。そして新しい遊びを見つけた子どもみたいにぱっと表情を輝かせて赤のボールペンに持ちかえ、2本の線の交点を通るように縦の線を付け加えた。

「これは3次元空間の3つの直交軸ね。そして第1軸と第2軸のある平面の点、つまりベクトルを一つとるの」

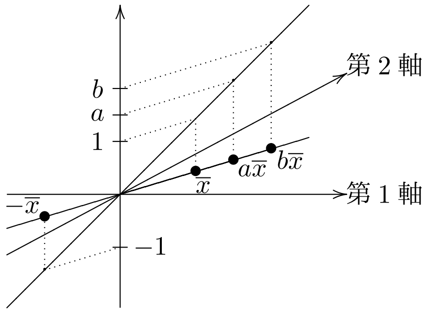
鉛筆を持ち直し、図の中の適当なところに印を付ける。その近くに“$\overline{x}$”と書いた。次に原点と印を付けた点を通るように直線を引く。そして縦の軸の、原点より少し上に印を付け、その横に“1”と書き込んだ。

そして原点と1の印が付いた点、それに $\overline{x}$ と書いた点の3点を頂点とする、1と $\overline{x}$ が対角に来るような平行四辺形を点線で描（か）く。さらに赤ペンに持ちかえ、新たに出てきた頂点と原点を結ぶよう第5の直線を引いた。

「この直線は第1軸と第2軸を含む平面を飛び出してるのね。原点でこの平面と交わってるの。で、a 倍はこうやって」

縦の軸の適当な点に a と書く。そこから $\overline{x}$ を通る直線と平行に、第 5 の直線と交わるまで点線を引く。さらにそこから縦に点線を描きながら $\overline{x}$ を通る直線とぶつかるまで移動し印を付け、そこに $a\overline{x}$ と書いた。

「ここが $\overset{\text{エックスの}a\text{倍}}{a\overline{x}}$ だね」



「うーん、3 次元の絵は描きにくい。と言うより、紙は 2 次元なの。訓練したら 3 次元っぽく錯覚するようになるだけなんだよね。

赤で描いた 2 本の線はベクトルの平面から飛び出してるのね。で、点線で縦に辿っていったとこにある直線は上の直線をベクトルの平面に真っ直ぐおろしたもの。実数倍した結果のベクトルは全部一直線に並ぶの」

平面に描かれた図が 3 次元っぽく見える。考えてみると、確かに異常なことかもしれない。そんな能力を僕たちはどうやって獲得したんだろう。

「a はどんな実数でも良いんだから、他の数をかけるのも同じだよね」

そう言ってユキは縦軸の適当なところに b と書き、先ほどと同じ要領で点線と $b\overline{x}$ の文字を書き込む。

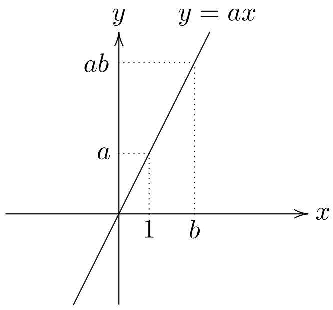
さらに原点と 1 の点の長さと同じ間隔だけ原点から下にずれた場所に -1 と書いて同じように線を引く。そして $-\overline{x}$ という文字。

「この $\overset{\text{マイナスエックス}}{-\overline{x}}$ は $\overset{-1\text{かける}\overline{x}}{(-1)\overline{x}}$ なんだね？」

「そう、$\overset{\overline{x}\text{というベクトルに}-1\text{という実数をかけたもの}}{(-1)\overline{x}}$、それが定義なの。ちなみに $\overset{\text{もとのベクトルに足したらゼロベクトルになるもの}}{\overline{y}+\overline{x}=(0,0)}$ って定義してもいいの。どっちも同じベクトルになることが“証明できる”からね」

式で見ても数のかけ算してるけど、絵も数のかけ算のときに描いたものに似てるな。そう言って僕は比例のグラフの図を描いてみる。

ユキに影響されたわけでもないと思うが、絵を描いてると僕もなんだか妙にわくわくしてきた。こんな単純な図を一つ描いただけなのに。



傾きが a の比例のグラフ $y=ax$。その $\overset{x\text{が}b}{x=b}$ のところでの y の値が $\overset{\text{実数}a\text{と}b\text{の積になる}}{ab}$。

$\overset{y\text{イコール}ax\text{の}}{y=ax}$ に $\overset{x\text{に}b}{x=b}$ を代入すると $\overset{y\text{が}a\text{と}b\text{の積}}{y=ab}$。式だけを見ると当たり前すぎて、逆に何を言いたいのかわからないくらいに当たり前だ。だがこの当たり前のことも図をたどりながら見てみると、違う意味がある気がしてくるから不思議だ。

「そうなの。ベクトルを実数倍するときの平面上の $\overline{x}$ の定数倍が描く直線が、兄さんが描いたグラフの y 軸、3 次元の図の方の縦に伸びてる線が兄さんの図の x 軸に対応するね。

兄さんの図だと ab は a が b 個分って順番だけど、ベクトルのだと $a\overline{x}$ は $\overline{x}$ が a 個分なの。個数を後に書く小学校の流儀と、算数以外だとよくある個数を先に書く流儀の図だと、縦と水平方向が逆転しちゃうのね。まあ全然本質的なことじゃないけど。

ちなみに

$$\overline{x} - \overline{y} := \overset{\text{ベクトルの引き算は}-1\text{倍を足したものの略記}}{\overline{x} + (-1)\overline{y}}$$

だね。引き算というのが最初からあるわけじゃなくて、引き算にはちゃんと定義があるの。引き算するときは、原理的にはいつでも定義（これ）に戻ってやることになるのね」

足し算はベクトル 2 つから 1 つのベクトルを作る。成分ごとに足すという操作をしている。だがかけ算はベクトルと数からベクトルを作る操作なのか。どうしてこんな違いが出るのだろう。と尋ねてみたら

「そうだよね。

$$\overset{\text{全ての成分に同じ数をかけること}}{a + (x_1, x_2) := (a + x_1, a + x_2)} \text{ や } \overset{\text{成分ごとに数をかけたもの}}{(x_1, x_2)(y_1, y_2) := (x_1 y_1, x_2 y_2)}$$

も同じように考えたくなるよね。でもベクトルではそれはしないの。

数から始めると、成分ごとの足し算やスカラー倍は許して、この 2 つの演算を許さないってすごく不思議だと思うの。でも成分ごとの足し算や全ての成分の同じ数をかけることとは違って、この演算は図形的に理解することができないのね。

話の始まりを数の組じゃなくて、平面の点ってとこからにした理由はここにあるんだよね。点の操作って見方だと、最初に定義した演算は意味があって、今書いた式は意味がない操作なの」

うーん、そうなのか。さっき書いたような図でこの演算を描くにはどうすれば良いか。確かにちょっと思いつかないな。

「“本当に書けない”ってことも証明できるんだけどね。もっと正確に言うと軸と取り方で違う点になっちゃうってことなんだけど。……うーん、その話は長くなるかもだから、今日はやめとこう。脱線の方が本題より長いんじゃ本末転倒だしね」

そう言ってユキは背筋をぴんと伸ばし、話を仕切り直した。

1.6　雪菜のベクトル導入講義　後編

「最後に内積。二つのベクトルから一つの実数を作る操作なの。定義はこんな感じ」

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := x_1 y_1 + x_2 y_2$$

「足し算と実数倍はなんとなく意味はわかると思うの。でも内積はよくわからない。

意味がありそうな性質は 2 つくらいあるんだけどね。一つは同じ点同士の内積が原点からの距離の 2 乗になるってこと。

もう一つは原点からベクトルの点まで結んだ線分 2 本の直交性が、内積の値が 0 かどうかでわかるってことなの」

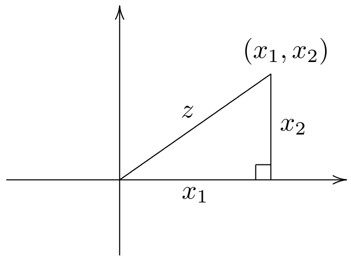
「ふうん？」

「1 つ目の性質、同じ点同士の内積は

$$(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2.$$

だね。これが原点との距離の 2 乗になってるのは三平方の定理からすぐわかるの。$\overset{\text{原点}}{(0, 0)}$ と $\overset{\text{第1軸におろした点}}{(x_1, 0)}$ と $\overset{\text{もとの点}}{(x_1, x_2)}$ を結んだ三角形は、$(x_1, 0)$ が直角になるよね。$(0, 0)$ と $(x_1, 0)$ を端点とする辺の長さは x_1 で、

$(x_1, 0)$ と (x_1, x_2) を結んだ辺は x_2 だね。だから三平方の定理で $(0,0)$ と (x_1, x_2) をつなぐ線分の長さは、2 乗が ${x_1}^2 + {x_2}^2$ になるのね」



$$z^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2$$

$\overset{\text{原点}}{(0,0)}$ と $\overset{\text{この点}}{(x_1, x_2)}$ とを結ぶ線分、それはこの直角三角形の斜辺で、$\overset{\text{その長さ}}{z}$ を 2 乗したら $\overset{\text{第1軸方向の辺の長さ}}{x_1}$ の 2 乗と $\overset{\text{第2軸方向の辺の長さ}}{x_2}$ の 2 乗を足したものに等しい。

なるほど、確かにすごく簡単だ。

「ちなみに原点からの距離、つまり $\overset{\text{内積の平方根}}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}}$ だけどね、これは $|\overline{x}|$っていう絶対値みたいに両端を縦棒で挟んだ記号で書くの。$\overline{x}$ のノルム、とか言うみたい」

実数の絶対値と同じイメージなのかな。書き方は縦棒で挟んだ形、表しているものは原点からの距離。1 次元のベクトルの場合の書き方を 2 次元の場合にもそのまま使っているということだろうか。

「もう一つの性質はこれよりは難しいかもしれない。

まずね、先に言っておかないといけないことがあるの。ひとつは内積の線形性と対称性。

$$\overset{\text{足したものと何かとの内積はそれとの内積をそれぞれ足したものになること。}}{\overline{x} \cdot (\overline{y} + \overline{z}) = (\overline{x} \cdot \overline{y}) + (\overline{x} \cdot \overline{z})}$$

それと

$$\overset{\text{実数倍したベクトルとの内積は内積にその数をかけたものになる}}{\overline{x} \cdot (a\overline{y}) = a(\overline{x} \cdot \overline{y})}$$

ってこと。この二つを合わせて線形性って言うの。

対称性っていうのは名前の通り

$$\overset{\text{二つを入れ替えても同じ}}{\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}}$$

ってこと。

これはね、とっても簡単。ただの計算なの。定義式を見たらわかるよね。無理に書くならこんな感じかな。$\overset{\text{こんなふうに同じ文字でその成分を書くことに}}{\overline{x} = (x_1, x_2), \overline{y} = (y_1, y_2), \overline{z} = (z_1, z_2)}$ とすると、」

$$\begin{aligned}
\overline{x} \cdot \overline{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\
&= y_1 x_1 + y_2 x_2 \\
&= \overline{y} \cdot \overline{x}.
\end{aligned}$$

「次に線形性だけど、2 つ式があるから 1 つずつ見ていこう。1 つ目、足し算の方はこんな感じ」

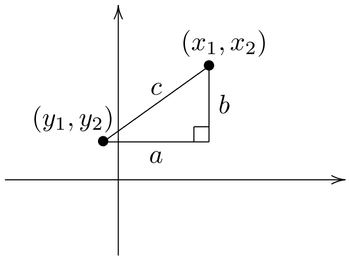
$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (x_1, x_2) \cdot (y_1 + z_1, y_2 + z_2) \\
&= x_1(y_1 + z_1) + z_2(y_2 + z_2), \\
\text{右辺} &= ((x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)) + ((x_1, z_1) \cdot (x_2, z_2)) \\
&= (x_1 y_1 + x_1 z_1) + (x_2 y_2 + x_2 z_2) \\
&= x_1(y_1 + z_1) + z_2(y_2 + z_2).
\end{aligned}$$

「両方同じ式になったよね。だから成り立つの。実数倍の方は」

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} =&(x_1, x_2)\cdot(ay_1, ay_2)\\
=&x_1(ay_1) + x_2(ay_2)\\
=&ax_1y_1 + ax_2y_2\\
\text{右辺} =&a((x_1, x_2)\cdot(y_1, y_2))\\
=&a(x_1y_1 + x_2y_2)\\
=&ax_1y_1 + ax_2y_2
\end{aligned}
$$

「って感じだね」

「もう一つの準備。原点じゃないところ同士の距離を内積を使って書いてみるの。
するとね、$\overset{2}{\overline{x}}$ と $\overset{\text{点}}{\overline{y}}$ の距離は $\overset{\text{差のノルム}}{|\overline{x}-\overline{y}|}$ になるの。
理由は原点との距離と同じだね。第 1 軸方向のずれと第 2 軸方向のずれを考えて、三平方の定理を使うの。$\overset{2}{\overline{x}}$ と $\overset{\text{点}}{\overline{y}}$ の距離を c と書くことにして、$\overset{\text{第一成分のずれを}a}{|x_1 - y_1| = a}$ 、$\overset{\text{第二成分のずれを}b}{|x_2 - y_2| = b}$ とすると」



$$
\begin{aligned}
a &= |x_1 - y_1|\\
b &= |x_2 - y_2|\\
c^2 &= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

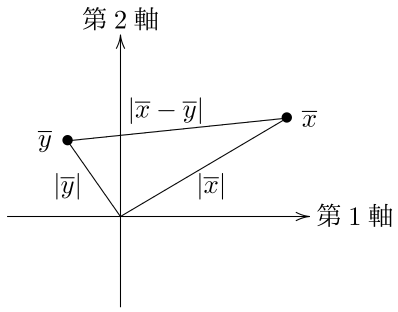
$$
\begin{aligned}
c^2 =&a^2 + b^2\\
=&(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\\
=&(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\cdot(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\\
=&((x_1, x_2) - (y_1, y_2))\cdot((x_1, x_2) - (y_1, y_2))\\
=&|\overline{x} - \overline{y}|^2
\end{aligned}
$$

「だから $\overset{\text{2点の距離は差のノルム}}{c = |\overline{x}-\overline{y}|}$ になるのね。
これで準備終わり。内積で直交がわかるってことだけど、後はただの計算なの。

(1.1)　「原点と $\overline{x}$ とを結ぶ線分」と「原点と $\overline{y}$ とを結ぶ線分」が直交する

ってことはこういう式と同値だよね」

(1.2)
$$|\overline{x}|^2 + |\overline{y}|^2 = |\overline{x} - \overline{y}|^2$$



「つまり $\overset{\text{上から下が導かれ}}{(1.1) \Rightarrow (1.2)}$ と、$\overset{\text{下からも上が導かれる}}{(1.2) \Rightarrow (1.1)}$ が成り立つの。
$\overset{\text{上から下}}{(1.1) \Rightarrow (1.2)}$ は三平方の定理で、$\overset{\text{下から上}}{(1.2) \Rightarrow (1.1)}$ は「三平方の定理の逆」って言われるものね。
そして $\overset{\text{下の式の右辺}}{|\overline{x}-\overline{y}|^2}$ がこういうふうに、」

$$
\begin{aligned}
|\overline{x}-\overline{y}|^2 =& (\overline{x}-\overline{y})\cdot(\overline{x}-\overline{y}) && \text{（ノルムの定義）}\\
=& \overline{x}\cdot(\overline{x}-\overline{y})-\overline{y}\cdot(\overline{x}-\overline{y}) && \text{（第 1 成分に関する線形性）}\\
=& \overline{x}\cdot\overline{x}-\overline{x}\cdot\overline{y}-\overline{y}\cdot\overline{x}+\overline{y}\cdot\overline{y} && \text{（第 2 成分に関する線形性）}\\
=& |\overline{x}|^2+|\overline{y}|^2-2\overline{x}\cdot\overline{y} && \text{（整理して対称性 } \overline{x}\cdot\overline{y}=\overline{y}\cdot\overline{x} \text{ でまとめる）}
\end{aligned}
$$

「って変形できるの。移項して整理するとこの式は、」

$$\overline{x}\cdot\overline{y}=\frac{1}{2}\left(|\overline{x}|^2+|\overline{y}|^2-|\overline{x}-\overline{y}|^2\right)$$

「ってなるよね。これはいつも成り立つ式だね。(1.2) はこの右辺が 0ってこと、つまり

$$\overline{x}\cdot\overline{y}=0 \tag{1.3}$$

と同値になるの。
こんな感じでね、$\overset{\text{直交性}}{(1.1)}$ が $\overset{\text{内積が0}}{(1.3)}$ って式で書けるの」

なるほど。確かに直角になるってことも、線分の長さも内積で書けている。$\overset{\text{定義の式}}{x_1y_1+x_2y_2}$ からは絵的な感じ全然しなかったけど、こんなふうにつなげていくのか。

ということをユキに言ってみたら

「数学ってそういうものなの。空間とか平面とかの図ばっかりじゃないんだけどね。伝えたいもの、原点からの距離みたいなものをね、うまく表現できる式を、長い歴史の中で誰かがいっぱい見つけてくれてるの。ものを表現する式を見つけるのは大変だけど、式が何を表現してるかを読み解くのは簡単なことが多いの。ちょっとしたおやつの合間にでもできちゃうくらいにね」

直交性や長さという“伝えたいもの”を内積という“式”で表現するという、今回の話はほんの一例。数学はこういうものなのか。

なんか不思議だ。頭の中を心地よい熱がみたしている。

「でもね、内積が表現してるのは、本当はこんなことじゃないと思うんだよね。でも、私にはこれくらいしか読み解けない。
もしお友達が何かわかったって言ってたら、教えてくれたらうれしいの」

「そうなんだ。うん、わかった。約束する」

秋月くんとの交友はこれからも続いていくことになりそうだ。

その後続けて、

「次元が３以上でもね、並べる実数の数が増えるだけで同じなの。足し算、実数倍、内積。それぞれこんな感じ」

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\
a(x_1, x_2, x_3) &:= (ax_1, ax_2, ax_3) \\
(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) &:= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3
\end{aligned}
$$

「この式自体は３次元ベクトルの場合ね。４次元でも５次元でもどう定義するか、大体想像つくよね。絵は３次元になると途端に書きにくくなるし、４次元なんてもっと。でもとにかく、互いに直交してる軸が次元の数だけある空間を考えるの」

という説明を受けていた。絵は描きにくい分図形的なイメージは難しくなるけどね、式だと何も変わらないの、と。

2　犬里高校数学部

2.1　初めての部活見学　上

次の日の朝、僕が教室に入るとすでに登校していた秋月くんがにこやかに僕のもとに歩み寄ってきた。

「はよーっす！　今日も数学部行こうと思うんだけどさ、本庄も行かないか？」

昨日の別れ際、また誘ってとは言ったが早速か。数学部自体についてはわからないが、秋月くんにはユキも興味を持っていたようだし、是非もなくご一緒させていただきたいところだ。

「うん、今日は大丈夫だよ」

「じゃあ放課後一緒に行くか。良いよな？」

僕は首肯する。

「オッケー、じゃあまたな」

秋月くんは他のクラスメイトのところへ去っていった。

始業式を含めた午前授業とホームルームが終わると、昨日と同じように秋月くんは僕の机に向かってきた。

「よし、じゃあ部活行こうぜ」

「うん、部室まで案内お願いして良い？」

「ああ、この校舎の４階だ」

教室を出る。秋月くんに先導される形で数学部の部室があるらしい方へ移動する。

「ちなみに誘ってから聞くのもあれかもしれないが、本庄は決めてる部活あんのか？」

移動中。まあ特に意味もない雑談だろう。秋月くんがそんなことを訊いてきた。

「ううん、どんな部活があるかもちゃんとは知らないんだよね。部活紹介もまだ目を通してない。あ、でも数学部の紹介は見たよ」

「ああ！　受けるよなー、あの紹介。あんなの見たら行かざるを得ないよな」

僕は曖昧にうなずく。正直、特になんとも思わなかったが、そんな野暮なことは言わない。

この子は確かに数学バカなのだろう。ユキと同じだ。僕にはそこまでは思えないけど、何かに打ち込める人は嫌いじゃない。

「じゃあ数学部の見学が本庄の部活ライフの第一歩になんだな」

部活ライフとはまた大げさな。その言い方がなんだかおもしろくて僕は思わず破顔してしまった。

「そうなるね。秋月くんは数学部に入るつもりなの？」

「ああ、そのつもりだ。おもしろそうだったしな」

と、そこで秋月くんが立ち止まる。目の前の扉には手書きで“数学部”と大きく書かれた画用紙が貼り付けられていた。
「ここだ、数学部」
トントン。扉を叩き、
「失礼しまーす」
秋月くんは反応を待たずに扉を開いた。

数学部の部屋の作りは僕たちが普段授業を受ける教室と基本的に同じだった。前後に黒板と掲示板。後方にはさらに個人用の荷物入れと清掃用具入れ。あとは前の黒板の上の時計が教室と同じだな。
しかし普通の教室に人数分用意されている個人用の椅子、机なんてものはもちろんない。代わりというのは違うかもしれないが、雑多な椅子と机が置かれていた。収納や持ち運びに便利な折りたたみ式の椅子やテーブルがあると思えば、通気性の良さそうな板張りの椅子、クッション性の良さそうなソファ、ずっしりと重厚感のある食卓のような机などなど、統一性がまるでない。
部屋の中にいた人物は内巻きのショートヘアの女生徒が一人だけ。座り方のお手本のようなすらりとした姿勢で長いすに腰掛けていた。
僕たちが近づいてもこちらに気付く気配もなく、食卓机の上に広げた大学ノートとその前のスタンドに立てかけられた本とを真剣なまなざしで見比べている。
「サヨちゃん、こんちわっす。昨日言ってた円周率男子連れてきましたよ」
ノートをのぞき込める距離から秋月くんが声をかけ、その女生徒はようやく顔を上げた。
……円周率男子って、どういう説明だ。まあ、あんな自己紹介をしてしまった僕が悪いのかもしれないが。
「あら、ようこそ数学部へ」
彼女は立ち上がって僕たちに席を勧めてくれる。ややつり上がった、大きな瞳。顔立ちからは少々きつい印象を受けるが、声の響きや一連の所作の一つ一つから、とても凛とした雰囲気が感じられて、シックなデザインの制服が妙に似合っていた。
「は、初めまして本庄建也と言います」
雰囲気に飲まれたというわけではないが、さっき無理矢理思い起こされた昨日の失敗を引きずってか、うまく言葉が出てこない。
「初めまして、本庄くん。秋月くんから話は聞いてるわ。私は宮原紗夜（みやのはらさよ）。一応この部の部長をやらせてもらってるわ。と言っても、今は私以外に部員はいないんだけどね」
他の部員が今この部屋にはいない、という意味ではないだろう。見ればわかることをわざわざ言うとも思えない。ということは卒業などで所属している人が宮原先輩だけになったということだろうか。
部屋に入って改めて周りを見回してみると、先ほどから見えていた他にある物と言えば廊下側の壁に面して本棚が三台置かれている程度だった。でもその本棚には本やノートや段ボールがびっしりつまっていて、全てこの部の財産であるとすればそれなりに歴史があるのだろうなと思わせる風格があった。
「俺、絶対入りますから。邪道数学部！」
邪道？　昨日の今日でそんなブラックジョークが言えるくらいに親しくなったのかこの二人は。ただ単に秋月くんがフランクなキャラなだけかもしれないが。
「ありがとう秋月くん。これで三年間は安泰ね」
先輩はその点については特に言及しなかった。これと言った反応も見られず、どう思っているのかは全く読めない。
宮原先輩に秋月くんを加えても部員は二人だけだ。そんなので大丈夫なのだろうかと訊くと、
「うちの学校が地域密着を謳ってるのは知ってるかしら？　その一環で部活動には外部の人も参加できるのよね。学校の部活と言うよりも地域の同好会みたいなところがあるのよ」

そう言えば放課後は外部の人も校内施設を利用できるみたいなことがパンフレットに書いてあった。学校の設備だけでなく、部活動そのものにも参加できるのか。

ということはあいつを連れ込むことも制度的にはできるってわけだ。

「外部の人も合わせて五人の名前があれば続けていけるのよ。まあ学外の人は“学校の部活としての”正式な部員扱いではないのだけどね。だから学内部員がゼロになるとさすがに部活として認められないのよね」

なるほど。原理的には二年に一度新入生が入ればなんとかつないでいけるのか。

「そうそう、部室来てもらったばっかりだけど二人ともお昼食べた？　まだなら一緒に学食でどうかしら？」

僕も秋月くんも何も食べてもいなければ用意もしていなかったので、ぜひもなく、僕たちは学食へ移動する。

部室を出るときに先輩は食事中の札を出していた。

学食、学内食堂は校舎から渡り廊下で屋根伝いにいけるところにある、何の変哲もない木造二階建ての建造物である。一階と二階でメニューの傾向が異なるそうだ。

一階は単品を組み合わせて購入する形式の店（カフェテリアというらしい）で、入り口のすぐ脇の階段から入れる二階は定食のみ扱っている定食屋なのだそうだ。和洋中とそれなりにバリエーション豊かな定食屋が揃っているらしい。（宮原先輩が定食屋と言っていたし、他に適当な言葉が浮かばないのだが、そういう店は普通、定食屋というのだろうか？）

授業が本格的に始まると戦争になる、とは宮原先輩の言葉。午前最後の授業が長引くと、長蛇の列に並ばされて、昼休みの時間が根こそぎ奪われるらしい。

午前授業のせいらしい、今日はまだ並んでいる人はほぼいない。食事中の人も散見される程度という大変穏やかなもので、混雑する光景はいまいち想像できなかった。高校生は大変なのだな、とこのときの僕は他人事のように思っていた。

先輩が言うには定食屋の方が回転が速く、お昼の混雑時に利用するにはそちらの方がお薦めらしい。

と、いう理由で僕たちは今のうちにカフェテリアを堪能することになった。

外食自体あまり慣れてない僕は、多様なメニューに目移りしてしまった。恥ずかしながら妙に興奮していたような気がする。食堂のスタッフの方々ご迷惑おかけしました。今度からはもっと素早く決められるよう善処します。

結局白米と豚汁、フライドポテト、金平ゴボウ、冷や奴にハンバーグ、そしてパックの牛乳というメニューになった。トレーがいっぱいだ。ちょっと取りすぎたかもしれない。

「そろったわね。では」

「「いただきます」」

家で食べるのに比べると味付けは全体的に濃いだろうか。外で食べるものは概して味が濃いとは聞くが、学食のメニューも例外ではなさそうだ。どのメニューも表面に独特の歯ごたえがあり、なんだか新鮮な食感だった。

「本庄くん、クラスの自己紹介で円周率が本当に決まるか納得したい、みたいなこと言ってたのよね。よかったら疑問の内容を詳しく聞かせてもらえないかしら」

円周率男子と言われた時点でなんとなく聞かれるんじゃないかと思っていた。ユキには一度説明してみたが、他の人にも通じるだろうか。

「あ、はい。どこから話せば良いのか迷うのですが、えーっと……円周率って円周と直径の長さの比のことですよね」

「そうね」

「円はみんな相似だと思うのでどんな円でも比が変わらないのは良いと思うんです」

宮原先輩は相づちをうちながら熱心に聞いてくれる。それに勇気づけられ僕は続ける。

「円周率を求める方法でよく聞くのは、内接多角形と外接多角形の長さを求めて、辺をどんどん増やしていくと円周の長さが少しずつ正確にわかってくる、って方法だと思うんですよ。

円弧の長さよりも、内接多角形の辺の方が短いのはわかるんです。端と端を真っ直ぐつないでますから、辺の方が弧よりも短いと思います。

でも外側を回る方が円周より長いのがなんでなのかわからないんです」

小学校のとき、円の外に描かれた辺で接する正方形と、内側に描かれた頂点で接する正六角形の図を見せられて、これが $\overset{\text{円周率が3と4の間にあること}}{3<\pi<4}$ の理由だと言われた。$\overset{\text{内側}}{3<\pi}$ の方はともかく、$\overset{\text{外側}}{\pi<4}$ の方はいまいち納得できないまま、未だに引っかかっている。

「内側をグネグネ曲がりながら進むのと、外側を真っ直ぐ進むのだと外側の方が短いことってありますよね」

高校から駅まで街の中をあちこち寄り道しながら進むのと、大回りだけど真っ直ぐな県道を行くのと。街中の方が歩く距離が長くなることは普通にあり得る。行き止まりで引き返すとか、同じ場所をグルグル回るとかを抜きにしても、だ。

もちろん円弧はそんなにグネグネしてはいない。だが、グネグネしてないければ内側を回る方が近いのかと言われると、それも本当かわからない。なんとなくそんな気がするだけだ。そもそも“グネグネしてる”ってのがどういうことなのか自体、全く謎だし。

喉を湿らせて一度深呼吸する。

宮原先輩は箸を動かしながらもずっと耳を傾けてくれていた。考えるそぶりや相づちのタイミングでちゃんと聞いてくれているのがわかる。

こちらを向いてしきりにうなずいてくれている。秋月くんも満足げにこちらをうかがっていて、僕は勇気付けられる。

「それが一つです。もう一つ円周率について気になるのは円の面積なんです。円の面積が半径の二乗かける円周率っていうのも理解できません。

学校で聞いたのは円を扇形に分けて一つ一つの扇形の面積を合計するって考え方です。一つ一つの扇形が高さが半径で底辺が円弧の長さの三角形になるから、円の面積は半径と円周をかけたものの半分になるって言われました。けど、ずっと悩んでるんですけど納得できないんです」

確かに“扇形と三角形の形の差”は細かく分ければほぼなくなる。両者の面積に差があるとしてもすごく小さくはなるだろう。だが 0 である理由はない。細かく分ければ一つ一つの差が小さくなっても、扇形と三角形の個数が増えるので全体としての差は無視できないのでは？　と思ってしまう。

うまく伝わっただろうか。ユキ以外の相手に数学の話をするなんて初めての経験である。不安 9 割、期待 1 割で宮原先輩の反応を待つ。

宮原先輩は考えをまとめるように大きく一度うなずき、ティーサーバーでもらったお茶を一口含んでから口を開いた。

「つまりこういうことで合ってる？　きみの疑問は大きく二つ。一つは円周の長さの上からの評価の正当性。もう一つは扇形の面積と三角形の面積になぜ差がないのか」

「二つ目はそうだと思います。上からの評価というのはなんでしょうか」

聞き慣れない言葉だ。

「例えば円に外接する正方形の周の長さは直径の 4 倍でしょう？　そこから $\overset{\text{円周率が4より小さい}}{\pi<4}$ って式が出るって言われてるわよね。求めたい値が○○より小さい、という形の式を上からの評価式というの。逆に××よりは大きい、っていうのは下からの評価ね」

なるほど。大きい数が上に、小さい数が下にあるイメージなのか。水銀の温度計みたいだな。

実際の数よりも上にある場所を一つの限界として見つけるってことが「上からの評価」か。

$3<\pi<4$ というのは円周率が 3 と 4 の間にあるってことだが、そんなふうに、“大体この辺だ”と値の範囲を限定することを円周率の“評価”と言う、という理解で良いのだろうか。

「はい。それが僕の知りたいことです」
「確かにな。俺もそれはずっと気にはなってたんだよな」
「ええ、そうね。私もずっと、なんとなく気持ち悪かったのよね。今その原因がわかったわ」
先輩はそこで言葉を句切ってお茶を一口含み、
「せっかくだから部室戻ったらもっと掘り下げてみましょうよ」
そう言って宮原先輩は表情をゆるめる。
すましているとちょっときつく見えるけど、笑うととたんに柔らかい表情になる人だな。
気付くと二人とも食べ終わっていて、僕を待っている状態だった。
ちょっと注文しすぎていたようだ。話すことで箸が止まっていたこともあるが、最後の方は食べるペースが落ちてしまった。
今度からはもう少し減らそう。そう決意しながら急いで残り物を片付ける。
そして僕たちは数学部の部室に戻った。

2.2　初めての部活見学　中

部室に戻ると宮原先輩は本棚から一冊のノート出してこちらに見せるように食卓机に置いた。表紙には「邪道数学部活動記録」と書かれている。
邪道数学部？　秋月くんが言ってたのはブラックジョークの類ではなくて、いやこのネーミング自体は自虐的なブラックジョークなのかもしれないが、秋月くんが考えた呼称ではなく公式愛称みたいなものなのだろうか？
「まとまった話をしていたときは、内容をこのノートに書いて残してるの。とりあえずまとめるのは後で良いので、議論を始めましょうか」
宮原先輩が黒板の前に立つ。自分が司会進行を務めるということなのだろうか。
自然体ですらりと背筋が伸びた宮原先輩が黒板の前に立つと、ただ立っているだけのときよりも一層その凛々しさが際立っていた。
話を聞く体勢を取るために、僕と秋月くんは会議用テーブルと一緒に置かれている長いすに座って姿勢を正した。
「どこから始めましょうか。そうね……大体の疑問点はわかったから、今度は逆に理解できていることを整理してみましょうか。そうすると、疑問点がもっとはっきりしてくると思うわ。
半径１の円に内接する多角形については納得してるのよね。わかってること、ちゃんと書いてみましょうか。まず円に内接する正多角形の周の長さは辺が増えると長くなる。そして円周の長さはそのどれよりも長い」
宮原先輩はそこで言葉を切り、僕たちの表情をうかがう。
僕らがうなずくのを確認して次のように黒板に書いた。

	半径１の円に内接する正	３	角形の周長
＜	〃	４	〃
＜	〃	５	〃
	…………………………………		
＜	２×円周率		

よどみない動きで書き記していく先輩。

「式で書くとこんな感じかしら。毎回こんなこと書くのは大変だから正 n 角形の周の長さは $I(n)$（アイエヌ）って書きましょうか。I という文字を選ぶ理由は特にないわ。ただの思いつきよ。ともかく、この記号を使えばここの、ながーい三点リーダーで略してることもまとめて、次の二つの式にまとめられるわね」

黒板の右方へ移動して次のようなことを書く宮原先輩。

> $I(n) =$ 半径 1 の円に内接する正 n 角形の周長
> 全ての 3 以上の整数 n に対して以下の式が成り立つ。
>
> - $I(n) < I(n+1)$.
> - $I(n) < 2\pi$.

僕たちは再びうなずく。

今宮原先輩が書いた $I(n) < I(n+1)$（1つ目の式）は、n が 3 や 4 の場合は黒板の左に最初書いた 1 行目から 2 行目と、2 行目から 3 行目だな。

$I(n) < 2\pi$（2つ目の式）は左の式のどこかの行を書き直したものというわけではない。途中に出てくる正ナントカ角形の周の長さが、どれも円周より短いということだ。

宮原先輩は続ける。

「さて、内接多角形はこれくらいかしらね？　じゃあ謎の待つ外接多角形に行きましょうか。内接多角形の周の長さを $I(n)$ と書いたのと同じように、外接正 n 角形の周の長さを $A(n)$（エーエヌ）とでも書きましょうか。$A(n)$ に関しては、これくらいはわかるんじゃないかしら？」

宮原先輩はさらに右方に移動して次のように書いた。

> $A(n) =$ 半径 1 の円に外接する正 n 角形の周長
> 全ての 3 以上の整数 n に対して以下の式が成り立つ。
>
> - $A(n) > A(n+1)$.
> - $I(n) < A(n)$.

外接多角形の方も辺が多くなればなるほど円にだんだん近づく。内接多角形のときとは逆に内側に入っていくから、今度は少しずつ短くなっていく。それが 1 行目だな。

2 行目は同じ正ナントカ角形同士では外接してるやつの方が長いと。相似だし、円の外にある方が大きいんだから当然そうなる。

再びうなずく。

「ええ、それくらいはわかります」

秋月くんも僕の言葉に同意するようにうんうんとうなずいた。

「当たり前のことでも一つ一つ式で書いてみるのよ。そうすると頭の中が整理できて来ないかしら？　疑問点もはっきりするし、使える道具もちゃんと意識できて、解決にも近づいていく感じ。

じゃあ学食で本庄くんが言ってた疑問は式で書くとどうなるか、わかるかしら？」

そう言って僕の方にチョークを差し出す宮原先輩。

え？　僕が書くの？　まあこれくらいは簡単ではあるが。

内心戸惑いながら僕は立ち上がり、先輩からチョークを受け取って黒板の端の余ったスペースに書く。

$$2\pi < A(n)$$

ただの短い棒だけど、チョークってなんだか持ちにくい。変な力がかかるのか、自分でも予想外に字が崩れる。

「そうね。もう少し正確に書くとこうなるかしら」

そう言って宮原先輩は僕の書いた文字の前後に書き込みを入れる。黒板に書かれた文章は次のようになった。

“ 全ての ”3 以上の整数に対して
$2\pi < A(n)$　は成り立つか？

「1 つ目の疑問はこれでいいかしら？」

「はい」

と、答える僕の声に被るタイミングで秋月くんが声を上げた。

「あ、そうだ！　ちょっと話それるけどさ。これって正しいのわかるか？」

秋月くんは立ち上がり、教室の後ろの黒板（前の黒板は今までに書いたことでいっぱいになっていた）にこんなことを書く。

n が十分に大きいなら
$I(n) < A(n) < I(n) + 0.01$
が成り立つ。

0.01ってのは特に意味はないんだろう、小さい数ってくらいの意図だと思う。$\overset{\text{内接多角形の周の長さ}}{I(n)}$ は $\overset{\text{外接多角形の周の長さ}}{A(n)}$ よりは短いけど、その差は辺が増えると小さくなる、ってことか。それはもちろん正しそうだ。理由は

「うん、わかると思う。辺が増えると内接多角形をちょっと拡大したら外接多角形になるし。拡大率がほとんど 0 になるような数があればいいんだよね」

「そうだ。$\overset{\text{辺の数}}{n}$ を増やすと拡大率は 1 に収束するからな。まあ拡大率は普通は比のことを指すだろうから、ほとんど変わらないってのは 0 じゃなくて 1 な」

「あ、そうか。確かに比だよね」

前後の黒板を改めて見てみる。外接多角形と円の周の長さを比べる以外にも、関連した問題は結構あるんだな。

次々と課題を挙げていける 2 人に感心と共に、ちょっとした劣等感を感じてしまう。

「ちなみに、なんでこんな質問したかはわかるか？」

ああ、それはなんとなくわかる。つまり、

「内接多角形と外接多角形の周長を測る方法で、円周率が小数点第 2 位まで求められるってことだよね」

「ああ、大体そんな感じだ。$\overset{\text{外接多角形の長さ}}{A(n)}$ と $\overset{\text{内接多角形の長さ}}{I(n)}$ の差が 0.01 以下になるってことだからな。まあ

$$\overset{\text{3.137 と 3.146 の間にある}}{3.137 < \pi < 3.146}$$

ってだけじゃ、小数点第 2 位が 3 か 4 かは判らからねえから、正確にはちょっと違うんだが。ともあれ 0.01 は例えで出した数だ。どんな小さい数でも同じように n はとれるわけだから、円周率の値はいくらでも正確に求められるわけだな。もちろん全部、$\overset{\text{外接多角形が円周より長い}}{\pi < A(n)}$ ってことが保証されたら、って話だが」

ふむ。円周率の計算法は外接多角形が円周より長いってことに帰着される。そもそもの僕の疑問もそこから始まってたんだ。外接正方形の周の長さ 4 が円周の長さ π よりも大きいっていうことの根拠がわからなかった、っていうことから。

宮原先輩は僕たちの表情を順にうかがい、言葉が途切れたのを確認するような間の後、口を開く。

「円とそれに接する正多角形の長さについてはこんなものかしら。本庄くん、他にも何か言っておきたいことはある？」

僕は大丈夫です、と答える。

「じゃあここで一旦区切りましょう。ねえ、せっかくだからノートに書いておきましょうよ。本庄くん、書記お願いしても良いかしら？」

宮原先輩は食卓机の“ 邪道数学部活動記録 ”を指し示す。

今の話を僕に整理しろと？

体験の身には重い、とやんわり断った。だが、体験でも今日一日は全く普通の部活動を見て触れて、実践して欲しい、と押し切られてしまい、最終的には僕が書くことになってしまった。

2.3　初めての部活見学　下

どうしよう。前後の黒板を改めて読み返す。

エッセンスは全てそこに書かれているような気はする。黒板に書かれてることをちょっと整理すれば一応は格好が付く、と信じることにしよう。宮原先輩、黒板の使い方うまいなと改めて思う。

ノートの書き方を考えていると、携帯から着信音が鳴った。先輩に断って確認すると舞ちゃんから陸上部の見学を終えたとのメッセージだった。こちらがまだ部活見学中であると返信したら、彼女も数学部見学に途中参加することになった。

舞ちゃんが部室に到着すると、僕を除いた 3 人は互いに簡単な自己紹介をする。

「あの、失礼かもしれませんが、宮原ってもしかしてうさまるデパートの……？」

「あら、知ってたのね。うちの父が今の代表らしいわね」

「代表らしい、って他人事っすか」

という秋月くんの茶々に対する宮原先輩の答えは、

「実際、他人事よ。父の仕事を見る機会なんてほとんどないもの」

という、非常にあっさりしたものだった。

周辺数県に展開するうさまるデパート。その本店が僕たちの住む猫川町（ねこがわまち）の隣町、兎山市（うさぎやまし）であるということは、この辺りの住民の間では多少の自慢を持って語られることの一つである。社長をテレビで見たこともあったが、そう言えば宮原（みやのはら）という名前だったか。

聞けば先輩の家は、もとは本屋さんだったらしい。それが紆余曲折、いろいろと事業を拡大していった結果、今のような総合商社になったのだそうだ。

そんな先輩のお家事情を思いがけず知ることになったが、閑話休題！　と宮原先輩は場の空気を切り替えるように数学部らしい話題へとシフトしていった。

黒板に書かれていたことについて、先輩と秋月くんが舞ちゃんに一通りの説明する。舞ちゃんはときどき相づちを打ちながら、携帯で板書の写真を撮っていた。

そんな様子を脇目に見ながら、僕はノートに書く内容をまとめるのに必死だった。

今までに活動日誌に書かれた文章をいくつか見てみる。

とりあえず日付は書くみたいだな。書き方は日によっていろいろだが、動機（考えるきっかけ）、定義（言葉の使いの確認）、成果（わかったこと）、課題（わからなかったこと）くらいを書けば良いのだろうか。

途中先輩に書き方を訊いて彼らの話に水を差しながら、見よう見まねという感じでなんとかノートを書き上げてみた。

四月〇日

円周の長さは辺の数が多い内接正多角形と外接正多角形の長さを調べれば近似値がわかると言われている。それは本当なのか？　周辺事項を整理した。

記号の定義

$I(n)$：半径１の円に内接する正 n 角形の周の長さ
$A(n)$：半径１の円に外接する正 n 角形の周の長さ

(多分) わかっていること

以下のことが成り立つ。ただし (1)〜(4) は $n \geqq 3$ となる整数 n ならいつでも成り立つという意味である。

(1) $I(n) < I(n+1)$.

(2) $I(n) < 2\pi$.

(3) $A(n) > A(n+1)$.

(4) $I(n) < A(n)$.

(5) $x > 0$ がどんな小さい数でも、x に応じて大きな整数 n を定めると $A(n) - I(n) < x$ が成り立つようにできる。

最大の謎

全ての $n \geq 3$ となる整数 n に対して $2\pi < A(n)$ が成り立つこと。

こんなものか？　まあ不備があれば書き込んでもらおう。
“活動記録”を書き上げた旨を先輩に告げると、三人は寄り集まってノートをのぞき込んできた。
「うん！　よく整理されてとても読みやすいわ」
宮原先輩と秋月くんはしきりにうなずいてくれる。
合格をもらえてよかった。肩の荷が下りた気分だ。
「それに、各文章の中で n がどういう数なのか、何かで決まる数か、どんな数でも良いのかが過不足なく書けてるのがすごいと思う。いきなりだとなかなか書けないものよ」
確かに日常の言葉とはちょっと違うし、学校の授業でもそんなに見ないかもしれない。ちゃんと書けてるとすれば全面的にユキのおかげだ。
「こうやって改めて見ると思うんだけど、(2) や (4) はともかく、(1) と (3) はちゃんと証明しようとすると簡単じゃないかもしれないわね。$I(n)$ や $A(n)$（正多角形の辺の長さ）は具体的な式が三角関数を使うと書けるのだけどね、６角形と１２角形の周の長さの長短は簡単にわかるけど、６角形と７角形の長さは、式で書いても比べるのは難しそうだわ」
三角関数。僕も前に勉強したことがある。６角形と１２角形の場合というのは辺の数がちょうど倍になっている場合ということか？　ということは多分、
「半角公式が使えますしね」

弧の長さに対応する三角関数の値が関係してくるのだろう、だから辺の数が 2 倍になれば半分の角度が出てきて……と、あまりちゃんと考えずに言ってみた。宮原先輩のうれしそうな顔を見る限りそこまで間違いではなかったようである。

「ええ、だから $\overset{\text{辺の数がちょうど2倍になったもの}}{I(2n)\text{ や }A(2n)}$ は $\overset{\text{もとの正多角形}}{I(n)\text{ や }A(n)}$ から計算できるのよね」

三角関数は直角三角形の斜辺と、その他の辺の長さの比。2 つの角度に対する三角関数の値から、合わせた角度に対する三角関数の値を計算する公式があったりして、図形的な量を計算する際の有用な道具の 1 つなのだそうだ。半角公式もそんな計算法の 1 つである。

もとは直角三角形に由来するという所から、“三角”関数という名前が付いたらしい。がユキに言わせると、

［三角形なんて関係ない、円周上の点の座標なの］

なのだそうだ。先輩にも意見を尋ねてみたら、

「お、さすが円周率男子。三角比ってやる意味ないと思うんだよな。90° までに縛ったものを最初にやる意味もわかんねえし。“x 軸から単位円周上をこれだけ移動したところの座標”って方がよっぽどわかりやすいし、しかも後で定義を修正する必要もないしさ。x 座標が $\overset{\text{コサイン}}{\cos}$、$y$ 座標が $\overset{\text{サイン}}{\sin}$ な」

と、秋月くんが先に答えた。ベクトルを知っていたこと、それに今の反応。秋月くんは学校の授業進度よりかなり先まで予習しているんだろうな、と改めて思った。同時にユキが彼のことをセンスが良さそうと言っていたことも思い出す。

宮原先輩も秋月くんの言葉にそうよね、と満足そうにうなずく。

舞ちゃんは何を思っているのかわからないが、ひたすら聞き役に徹していた。いつも場の中心にいる舞ちゃんにしては珍しい。

宮原先輩はノートに改めて視線を落とし、続けた。

「(5) も具体的に拡大率を求めないとわからなそうよね。もちろん $\overset{\text{外接多角形と円の周の長短の関係}}{2\pi < A(n)}$ よりは全然なんとかなりそうだけど。式で書く方法はわかるし、問題がはっきりしてるだけ手が出せそうな感じはあるわね」

確かに、わかりきったことかと言われるとそうではないのかもしれない。内接多角形も外接多角形も辺が増えれば円周に近づくのは、感覚的には全くその通りだ。だが具体的にどれくらい近いのかは計算しないとわからない。そして僕には、その計算の見通しがあるわけではない。

「できればもう一つの、面積の話も聞きたかったのだけれど、今日はもう下校時間ね。よかったらまた遊びに来てね」

部活について特に何も決めていない僕としては、曖昧にうなずいておくしかなかった。

そんな感じで犬里高校 2 日目は終了した。

宮原先輩も秋月くんも電車通学らしい。秋月くんは僕たちとは反対方向から通っていて、宮原先輩は僕たちの家の最寄り駅、猫川よりもさらに先の兎山が最寄り駅らしい。

狭い学区からみんなが通っている中学との違いを初めて実感したような気がする。

秋月くんとも宮原先輩とも別れ、もう少しで自宅にたどり着こうかという頃。ずっと黙っていた舞ちゃんがふと思いだしたように口を開いた。

「ねえ、三角関数のこと教えてくれない？」

意図を計りかねて訊ねると

「今日の話、私ほとんどわかんなかったよ。多角形の周の長さがどんなふうになるのかとか、それだけでも知りたいなって」

と、らしくないことを言い出す。ユキもいるときに一緒に数学の話に加わることはときどきあったが、舞ちゃんが自分からその手の話を切り出すのは初めてじゃないだろうか。

正直なところ、ちゃんと教えられる自信はあまりなかったが、

「わかった、うち来る？」
と誘ってみる。
しかし舞ちゃんは珍しく顔を伏せ、やや言いにくそうに、
「えーっと、できれば雪菜ちゃん抜きで……二人きりで教えて欲しいな」
と、逆に楠乃家に来ないかと提案してくる。
怪訝に感じたが、僕はふと考える。
あいつは非常によくできるやつだ。説明もうまいと思う。
僕はひっかかったことがあれば気軽に話を中断してどんどん質問しているから理解もしやすいし、教えてもらうのを苦に感じない。
だができるやつ故に、ペースも速いときがあるのも事実だ。あいつの話し方に慣れてないと、疑問点を解消できないまま進んで置いてきぼりになる、のかもしれない。
そう思い直し（その考えが合っているかはわからないが)、僕は舞ちゃんの提案に応えることにした。

2.4　楠乃邸にて　前編

斜向かいという地理的な近さと、同い年の子どもがいたという理由と、まあ他にも言葉にしづらい人間同士の相性の良さがあって、本庄家と楠野家は家族ぐるみの付き合いがある。
僕と舞ちゃんにとってはお互いに生まれたときからの付き合いで、物心付いてから今まで登下校もいつも一緒だったし、放課後を共にするのもごく自然なことだった。
相変わらず物の少ないリビングに上がらせてもらう。
舞ちゃんはジュースとおつまみをテキパキと用意してローテーブルの前に座った。
僕もいつものように舞ちゃんの横の席に座らせてもらう。差し出された軽食に感謝の意を示し、座り机にノートを広げて三色ボールペンを取り出した。
「さて、」
一呼吸置き、僕は開いたページの真ん中に大きく横と縦の軸、そして軸の交点である原点を中心とした円を描く。
さらに横軸と縦軸を表す線にそれぞれ軸の名前 x、y という文字を書き、円の半径を表すよう、円と横軸の正の部分との交わりの脇に 1 と記した。
「三角関数っていうのはね、この半径 1 の原点を中心とした円上の点の座標なんだよ。
この x 軸の正のところ—— $(1,0)$（イチ、ゼロ） って点だね——ここから円に沿って反時計回りに移動するよね。原点から移動先の点まで伸ばした線分と、x 軸の正の方向との間の角度を a としようか。
この a は円周の上を反時計回りに移動する道のりだ、って言い方もできるね。そういう角度の測り方は弧度法って言うんだって。数直線のとき数直線のときに、原点から右に移動した距離を実数で表すっていうのと似ててわかりやすいかもしれないよね。
時計回りに出発したときは、反対方向ってことで角度もマイナスの数で表すんだよ。これも数直線のときと同じだね」
「ふむふむ。数直線の 0（基点） を $(1,0)$ に合わせて、ぐるぐるーって円周に巻き付ける感じ？」
「あ、なるほど。弧度法ってそういうことなのか。確かにそういう言い方もできそうだね。一周巻き付けると数直線の 2π のところが円周のスタート地点と重なって、その後もずーっと巻き付けていけば、4π、6π、…って感じで 2π ごとにスタート地点に戻ってくる。負の方も -2π、-4π、…って感じで、2π の整数倍ごとに同じ場所に戻ることになるね」
「ふむふむ」
「なんで反時計回りが正で時計回りが負なのか、僕は知らない。でもこれが普通みたいだよ。まあ数直線の右方向が正ってのも理由はよくわかんないしね。気にしてもしょうがないかな。

ともかくね、どっち向きに移動しても移動先の点があるでしょ。その点の x 座標を $\overset{\text{コサインエー}}{\cos a}$ 、y 座標を $\overset{\text{サインエー}}{\sin a}$ って書くんだよ。

ちなみに $\overset{\text{この角度}}{a}$ を $\overset{\text{移動先の点}}{(\cos a, \sin a)}$ の偏角って言うみたい。原点の周りをどれだけ反時計回りに回ったか、を表す数だね」

「それだけ？」

「うん、それだけ。簡単でしょ？　180° 以上移動したら反対方向から移動した方が近いところに来ちゃうよね。その場合でも定義は同じ。 $\overset{\text{エー度}}{a}$ 回ったところの点の座標だね。例えば

$$\overset{\text{サインの210度の値はマイナス150度のと同じ}}{\sin 210^\circ = \sin(-150^\circ)}$$

とかが成り立つわけ。 $\overset{\text{コサイン}}{\cos}$ も同じだね」

「説明だけして弧度法は使わないんだ」

「別にどっちでも良いんだけどね。僕はこっちの方が慣れてるからいつものくせで度数法で書いちゃった」

「あはは。…あ、ここまでは問題ないよ。続けて」

「他に簡単にわかることだと…例えば、軸にちょうど乗っかるところはわかるよね」

円と軸の交点を確認しながら式を書いていく。

$$\begin{aligned} \cos 0^\circ &= 1 & \sin 0^\circ &= 0 \\ \cos 90^\circ &= 0 & \sin 90^\circ &= 1 \\ \cos 180^\circ &= -1 & \sin 180^\circ &= 0 \\ \cos 270^\circ &= 0 & \sin 270^\circ &= -1 \end{aligned}$$

うなずく舞ちゃん。

「それ以外ですぐにわかるのは、正三角形とか、直角二等辺三角形と関係する角度の場合かな。45° とか 30° とかね。例えば円周上の 60° のところの点と原点と $(1, 0)$ で正三角形ができるから、 $\overset{\text{コサイン60度}}{\cos 60^\circ}$ は 1 辺の長さの半分、つまり $\overset{\text{2 分 の 1}}{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$ になるね。 $\overset{\text{サインの方}}{\sin 60^\circ}$ は三平方の定理を使って計算すると、」

$$\sin 60^\circ = 1 - (\cos 60^\circ)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

「こんな感じかな」

「あ、そっかー。三平方の定理で

$$\overset{\text{コサインとサインの2乗の和が半径}}{(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1}$$

になるってことなんだね」

「そうそう。その通り！

それと 45° は斜辺が 1 の直角 2 等辺三角形ができるから

$$\overset{\text{サインとコサイン、どっちもルート2分の1}}{\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

だね」

「なるほどなるほど！」

「特殊な角度以外でわかるもいろいろあるよ。そうだなあ、一番簡単そうなのはこれかな」

$$\sin(a + 90^\circ) = \cos a$$

「んーっと、x 軸を $\overset{\text{キュージュー度}}{90^\circ}$ 回したら y 軸になるんだよね。あ！　だから $\overset{a\text{ 度のところ}}{(\cos a, \sin a)}$ を x 軸におろした点 $(\cos a, 0)$ が、原点を中心に 90° 回したら、$\overset{y\text{軸の同じ値のところ}}{(0, \cos a)}$ に移動するのかな？」

「そうだね」

「……原点からの距離が変わらなくって、方向が 90° 変わるから、確かにそうだね」

舞ちゃんはノートに横に x 軸、縦に y 軸を描く。そしてその交点である原点を中心とする円を描き、円周上に印を付けて、その横に $(\cos a, \sin a)$ と書いた。

そしてそこから、点線を打ちながら x とぶつかるまで垂直に移動して、ぶつかった点の近くに $(\cos a, 0)$ と書く。

また、$(\cos a, \sin a)$ から反時計回りに 90° 移動したところに $(\cos(a+90^\circ), \sin(a+90^\circ))$ と書いて、その点から真横に点線を引いて、y 軸とぶつかったところの点の座標を表すように $(0, \sin(a+90^\circ))$ と書いた。

「えっと、この回した三角形の y 軸の点を見て、成分を比べれば良いんだね」

その絵に何度も目を向けつつ、考えをまとめるようにときどき手をとめながら舞ちゃんは次のような文章をノートに書いた。

$(\cos(a+90^\circ), \sin(a+90^\circ))$ は $(\cos a, \sin a)$ を 90° 回転させたところ。 y 軸におろすと $(0, \sin(a+90^\circ))$. これは $(\cos a, 0)$ を 90° 回転させた点 $(0, \cos a)$ と等しい。 つまり $\cos a = \sin(a+90^\circ)$.

「そうそう、そういうことだね」

「なるほどー。あ、じゃあ $\overset{\text{コサインの方}}{\cos(a+90^\circ)}$ はどうなんだろう。$(\cos(a+90^\circ), 0)$ を 90° 負の方向、つまり時計回りに回転させると $(\cos a, \sin a)$ を y 軸におろした点 $(0, \sin a)$ になるんだね。だから、

$$\cos(a+90^\circ) = \sin a$$

かな」

「あ、そうじゃないんだよ。えっと、$(0, \sin a)$ が y 軸の正のところにあると、90° 回転させたところは $(-\sin a, 0)$ でしょ。x 軸の負のところに来てるよね」

「あ！　ほんとだ」

「同じように $\overset{y\text{軸の負のところにあるんだったら}}{\sin a < 0}$ だったらx 軸の正のところに行くよね。その場合も回転後の座標は $(-\sin a, 0)$っていう同じ式になるんだよ。だから」

$$\cos(a+90^\circ) = -\sin a$$

「が正しい式だね」

「あ、なるほどー。えーっと、$\overset{\text{サイン}}{\sin(a+90^\circ)}$ のときは符号変わらなかったのはなんでだろ？　……x 軸の正のところから 90° 回ると y 軸の正のところに、x 軸の負のところから 90° 回ると y 軸の負のところに来るからか。だから $\overset{\text{サインのときは符号が変わらなか}}{\sin(a+90^\circ) = \cos a}$ だったんだね」

「そういうことだね」

舞ちゃんは手を止めてしばらくノートを読み直していた。それをなんとなしにながめていて、僕はふと思い出す。

「あ、そうだ。一つ忘れてた。三角関数にはもう一つ、$\overset{\text{タンジェント}}{\tan}$ っていうのがあるんだよ。それはね、移動先の点と原点を結ぶ直線の傾きのこと。つまり

$$\overset{\text{サインとコサインの比}}{\tan a := \frac{\sin a}{\cos a}}$$

ってことだね。もちろん 90° とか 270° のときは傾きが無限大になっちゃうから tan は定義できないことになるね」

「ふーん、わかった。拍子抜けするくらい簡単だねー。で、これでどうやって $I(n)$（アイエヌ）や $A(n)$（エーエヌ）がわかるの？」

えーっと、どうやるんだろうな。僕はとりあえず頂点の 1 つが $(1, 0)$ に来る、単位円に内接する正 5 角形をフリーハンドで描いてみる。そして x 軸から一番近い頂点から x 軸と y 軸に垂線を引いてみた。

二人でその図を凝視する。

…………

うん、困った。

「どうやるんだろう？」

二人でうなる。あっちこっちに補助線を引いたり、垂線をおろしてみたりしながらああでもないこうでもないと試行錯誤する。僕が内心あきらめかけていたとき、舞ちゃんがこんな言葉を発した。

「内接多角形の辺が斜めになってるねー。真っ直ぐじゃないと三角関数になってくれないよね」

「だね」

確かにそうなのだ。どうすればそこを解決できるのか。

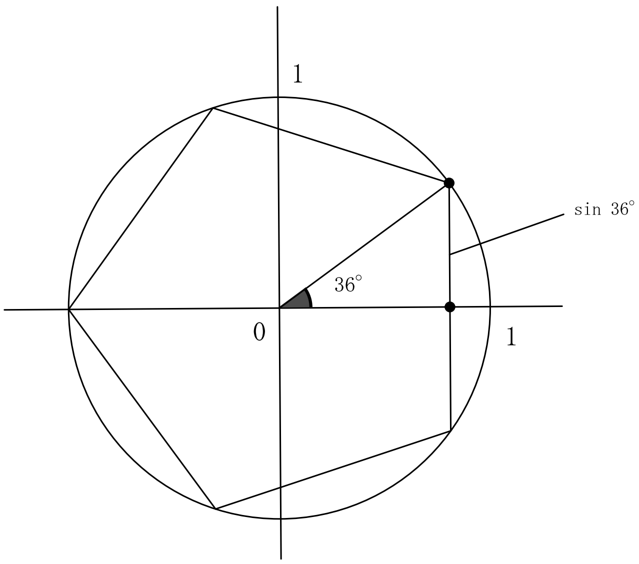
「ん？」

その直後、舞ちゃんは急に動きを止める。そのまた直後、はっとした表情で僕の方を見上げ、上体を乗り出しながらしゃべり出す。

「あ、そうか。じゃあ真っ直ぐになるようにずらせば良いんだよ。x 軸に対称に頂点を振ってさ、描けば良いんじゃない？」

「お？　そうか」

舞ちゃんの提案にしたがい、改めて図を描いてみる。



「なるほど、半分の角度の sin（サイン）の 2 倍になるんだ」

回転させて、長さを測りたい辺を y 軸と水平に配置する。考えてみれば非常に単純なことだった。なんで気付かなかったんだろうと少し落ち込みたくなる。

「ということは $I(n)$（アイエヌ）はその n 倍だから……」

$$I(n) = 2n \sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$$

「ってことかー」

図を見た舞ちゃんは表情を輝かせる。心なしか口調を加速させながら彼女は続ける。

「あ、じゃあじゃあ、$A(n)$ の方はどうなるんだろ。おんなじように辺を縦に書けばいいよね？　えーっと、今度は $y=1$（yイコール1）のとこに縦線を引くんだから、$\sin$（サイン）が $\tan$（タンジェント）になるだね。一辺の長さは $2\tan\left(\frac{360°}{2n}\right)$（半分の角度の$\tan$の2倍）のだから……」

$$A(n) = 2n\tan\left(\frac{360°}{2n}\right)$$

「こうかな！」

ふむ。確かにそうなりそうだ。外接多角形も内接多角形も図形的な形が同じだからだろうか、式の形もそっくりだな。

などと感心している僕をよそに、舞ちゃんは乗りだしていた身を引いて座布団に座り直して言う。

「…でもがんばってみたけどさ、こうやって三角関数の式で書けても、だから何？　って感じだよね」

「いや、そんなことはないよ。三角関数は式を変形する方法がいろいろわかってるからね。例えば、部室で言ってた半角公式とかね。それを使うと正１２角形の周の長さは計算できるよ」

「ふーん？」

なんとも言えない表情でこちらを見つめる舞ちゃん。疑問符でいっぱいになっているという顔だ。

「あ、じゃあその話もしようか」

と、思わず言ってしまったが大丈夫だろうか。$I(n)$ や $A(n)$ の式はやればできそうな気がしていた。だが三角関数の諸々の公式はほんとにうろ憶えで自信がない。

だが舞ちゃんがいつになく目を輝かせて、うん！　と言ってくるものだから後に引けなくなってしまった。まあやれるだけやってみよう。

2.5　楠乃邸にて　後編

「えっとね、加法定理っていう２つの角度の三角関数の値から、足した角度の値を求める式があるんだよ。確かこんな感じだったかな」

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

「式の形は印象に残ってるから覚えてるんだけど、なんでこうなるんだったかなあ？　全然思い出せない。まあともかくね、この式で a と b が同じ数だと、こうなるよね」

$$\sin 2a = \sin a\cos a + \cos a\sin a = 2\sin a\cos a$$

「えーっと、b に a を代入するってこと？」

「そうそう。b はどんな角度でも良いからね。aっていう角度のときを考えるとこうなるよね」

僕が書いた式に目を落としながら舞ちゃんはうなずく。

「でね、これは角度を２倍にしたら三角関数の値がどうだろう？　って式だよね。逆に $2a$ が先にあって、そこから b での値を求めたいってなったらどうなるだろうって話、それが半角公式」

$\sin 2a$ をわかってる数と見て、$\sin a$ や $\cos a$ という未知数についての方程式と見るわけだ。

舞ちゃんが相づちを打ってくれてるのを確認して僕は続ける。

「んーと、$I(n)$ は $\sin$ で書けてたから、$2a$（ニエー）も a（エー）も、$\sin$ だけ考えようか。で、$2a$ の方がわかってるんだから、これを一つの文字に置き換えよう、その方が見やすいよね。$c = 2a$（シー）ってしようかな。するとこうなるよね」

$$\sin c = 2\sin(c/2)\cos(c/2) \tag{2.1}$$

「確かにそういう式は出るよね。でもわからない数が二つない？ $\overset{\text{サイン2分の}c}{\sin(c/2)}$ と $\overset{\text{コサイン2分の}c}{\cos(c/2)}$ がさ。これ、どうやって解くの？」

「ああ、それは大丈夫だよ。舞ちゃんがさっき言ってたように、同じ角度のサインとコサインの間にはこんな式が成り立ってたでしょ」

$$(\sin(c/2))^2 + (\cos(c/2))^2 = 1$$

「ああ、なるほどー。これで $\overset{\text{コサイン}}{\cos(c/2)}$ を $\overset{\text{サイン}}{\sin(c/2)}$ で書けるんだね」

「その通り！　移項してルートをとれば、」

$$\cos(c/2) = \pm\sqrt{1-(\sin(c/2))^2}$$

「こんなふうになるから半角公式はこんなふうに書けるね」

$$\sin c = 2\sin(c/2)\cos(c/2) = \pm 2\sin(c/2)\sqrt{1-(\sin(c/2))^2}$$

「なんかすごい複雑。これで $\overset{\text{サイン2分の}c}{\sin(c/2)}$ がほんとにわかるの？　ルートの中にも外にも $\overset{\text{未知数が}}{\sin(c/2)}$ あるよ。しかも $\overset{\text{プラマイ}}{\pm}$ の2通りあるし」

「うーん、とりあえず両辺2乗して根号外してみる？　にしても毎回 $\overset{\text{サイン}}{\sin}$ なんて書いてたらゴチャゴチャになりそうだから、

$$\overset{\sin c\ \text{を}\ B}{B = \sin c}, \quad \overset{\sin(c/2)\ \text{を}\ X}{X = \sin(c/2)}$$

って略記しちゃおう。未知数が $\overset{\text{エックス}}{X}$ で既知数の方が $\overset{\text{ビー}}{B}$ 。$\overset{\text{小文字のエックス}}{x}$ は軸の名前で使っちゃってたし、$\overset{\text{小文字のエーやビー}}{a\ \text{や}\ b}$ も角度に使ってたからね、大文字にしよう。そうすると $\underset{\text{復号}}{\pm}$ がどっちでも、」

$$B^2 = 4X^2(1-X^2) \tag{2.2}$$

「になるね。$\overset{\text{エックスの2乗}}{X^2}$ の2次方程式になってるから、これは解けるよね」

「あー、ほんとだ。でも二次方程式を解くときのルートで符号がわけわかんなくなりそうだなー。けど、とりあえずやってみよっか！」

方針は一応見えた。舞ちゃんの言うとおり、難しく考えず進めてみよう。詰まったらそのときに考えれば良い。

「全部左辺に移して、X^2 の方程式として見たときに2次の項、つまり X^4 の項の係数を1になるように係数で割るとこうなるね」

$$4X^4 - 2X^2 + B^2 = 0$$
$$X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{B^2}{4} = 0$$

「平方完成できるように $\dfrac{1}{4}$ を足して引くとこうだな」

$$X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{B^2}{4} = 0$$
$$\left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1 - B^2}{4}$$

舞ちゃんは僕の手元を見ながらうなずいてくれている。僕は計算を続ける。

「だから平方根をとるとこうなるね」

$$X^2 - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - B^2}{4}}$$

「また平方根とらなきゃいけないのか。$\overset{\text{プラスマイナス}}{\pm}$ がわからないまま続けてくと訳がわかんなくなりそうだな……」

「でもとりあえず書いてみたらさ、こうなるよね」

そう言って舞ちゃんは最後の式を書く。つまり左辺の $\frac{1}{2}$ を移項して両辺の平方根を取った式だ。

$$X = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1 - B^2}{4}}} \tag{2.3}$$

「たっくん。これ、復号自由ってやつだよね」

「そうだね。うーん全部で 4 通り。どれが正解なんだろう」

「辺の長さなんだからさ、$\overset{X\text{ は 正}}{X > 0}$ じゃなきゃだめだよね？　だから外の復号は $\overset{\text{プラス}}{+}$ じゃないの？」

なるほど。確かにそうっぽい。

舞ちゃんは自分の考えを引き出すように式のあちこちを鉛筆で指しながらつぶやく。

「内側のはどうなんだろー？　ルートの中が $\overset{\text{2分の1}}{1/2}$ より大きいのか小さいのか、だよね。

うーん……辺の長さは短くなっていくんだから小さい方っぽいけどなぁ。つまり $\overset{\text{マイナス}}{-}$ ？」

「かなあ？　三角関数の定義から $\overset{B\text{ の絶対値は 1 以下}}{-1 \leq B \leq 1}$ だよね。だからどっちでも根号の中が負になったりはしないし、決定力に欠けるなあ」

「うーん、そうだねー……」

などと少しの間また、あーでもない。こーでもない。と、まとまらない議論をしていた僕たちだが、

「どっちかはわかんないけどさ、$\overset{\text{どっち}}{+}$ $\overset{\text{で}}{\text{でも}}$ $\overset{\text{も}}{-}$ でも $\overset{\text{アイジュウニ}}{I(12)}$ は計算できるよね。とりあえず計算してみようよ！」

という舞ちゃんの言葉で具体的な計算をしてみることにした。

「じゃあとりあえず $\overset{\text{マイナス}}{-}$ の場合からやってみよ」

$$X = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1 - B^2}{4}}} \tag{2.4}$$

という式を舞ちゃんは改めて書き、それを目立つように大きく囲む。そして立ち上がり、引き出しから電卓を取り出して来た。10 桁表示のやつである。

「えーっと、$n = 6$ から始めるよ。$\overset{B\text{ はサインの 30 度}}{B = \sin 30^\circ}$ だから……x 軸の上下に正三角形ができて値は 0.5 だね。それを 2 乗して 1 から引くんだから……」

舞ちゃんは次の順で電卓のキーを叩く。

0　.　5　×　=　M−　1　M+　MR　MR

すると 0.75 とディスプレイに表示される。ここまでで $1 - B^2$ が計算できたことになる。

$\overset{\text{さきほど囲った式}}{(2.4)}$ を注意深く見ながら舞ちゃんは続ける。

「で、これを 4 で割ってルートっと」

続いて次の順で叩く。

÷　4　=　$\sqrt{}$

ここまでで $\sqrt{\frac{1-B^2}{4}}$ が計算できた。ディスプレイには 0.433012701 の文字。

「で、この数を 0.5 から引いてもう一回ルート」

M−　0　.　5　M+　MR　$\sqrt{}$

ディスプレイの表示は 0.258819046 となった。

「これが $\sin 15^\circ$(サイン15度) なんだよね？　だからこれの 24 倍が $I(12)$ になるはずだよね。つまり 12 倍すると π(パイ) っぽい数になるはず？」

「そうだね。複合が $-$(マイナス) で正しいとすればだけど」

×　1　2　=

3.105828552

「「おー、それっぽい」」

なぜか言葉もタイミングも完全に被ってしまい、２人して吹き出してしまった。

舞ちゃんは再びディスプレイに目線を落とし、

「一応 $+$(プラス) の場合も計算してみるよ」

と言い、計算結果を書き留めてから電卓をリセットする。そして $X = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1-B^2}{4}}}$ という式をノートに書いて大きくカッコでくくり、それを見ながら慎重に電卓を叩いた。結果、

$\sin 15^\circ = 0.965925825(?)$、$I(12)/2 = 11.59110990(?)$

という明らかに内接多角形として大きすぎる値が出てきた。

「やっぱり内側の復号は $-$(マイナス) で良いんじゃないかなー？」

と舞ちゃん。

「そうかな？　一応そうらしい、ということで課題にしておこう」

「そだねー」

僕の言葉にうなずき、舞ちゃんはさらにこんなことを言う。

「おんなじように続けたら $I(24)$ も $I(48)$ も計算できるよね。おんなじように打てば良いだけだから、すぐできそう」

舞ちゃんは先ほど計算した $I(12)/2$ の値 3.105828552 を 12 で割って $\sin 15^\circ$ の値ディスプレイに表示させ、ノートの新しいページに書き付ける。

そして再び(2.4)(手順)を確認しつつ、先ほどと同じように電卓を叩いた。

結果、$\sin 7.5^\circ = 0.130526196$、$I(24)/2 = 3.132628704$。

「うん、少しずつ近づいてるね」

難しいことを考えずに数が変化していくのを見るのもなかなかおもしろい。舞ちゃんは手順を間違えないように気を配っていたと思うけど、電卓をただ横からのぞき込んでいただけの僕は純粋に π(円周率) に近づく様子を楽しんでいた。

舞ちゃんはさらに２つ先まで計算してくれた。

$\sin 3.75^\circ = 0.065403134$、$I(48)/2 = 3.139350432$。

$\sin 1.875^\circ = 0.032719107$、$I(96)/2 = 3.141034272$。

「お、良い感じだね！」

「だねー！」

理論的にはいろいろ課題が残っていたが、計算結果を見ていると妙な昂揚感があった。

予想外に熱中してしまい、気付いたら夕食の時間が迫っている。

また明日も一緒に登校しようと約束を交わし、僕は斜向かいの自宅に向かった。

2.6　自宅にて　前編

「ただいま」
家の奥に声をかけると、
「兄さん、おかえりなさい」
と遠くから返事が聞こえてくる。聞き慣れたユキの声だ。
リビングの扉を開けると食欲をそそる匂いに包まれる。ユキは台所でシチューをかき混ぜていた。
この手の煮込み料理は放っておくとすぐに焦げ付くそうで、長時間かき混ぜ続けなければならないらしい。傍目には非常に退屈そうに見えるのだが、本人が言うには、
［考えることは頭の中にいくらでもあるし、全然退屈はしないの］
なのだそうだ。帰宅が遅くなったことを詫びつつ、部活と舞ちゃんの家でのことを話すと、
「円周率の近似かあ……。
半角公式で sin（サイン）同士での漸化式を作ったんだね。やればできるとは思ってたけど、実際に導出したことはなかったなあ」
と言うので、持ち帰ったノートを見せてやった。
右手のおたまの動きを止めずに、左手で受け取るユキ。
僕がリビングで一息ついていると、ユキは半ば独り言のような感じで話し出した。
「へえ、おもしろいの。(2.2)（最初の式）で sin（サイン）と cos（コサイン）が両方とも解になるから、内側の復号でどっちの関数になるか決まるんだね。sin と cos がこういう符号違いの関係にあるなんて今まで気付かなかったの。」
そして僕の方に向き直って、今度ははっきりした口調でしゃべる。
「半角公式って普通は cos（コサイン）の倍角公式から出すものみたいだけどね。結果はもちろん同じだし、本質的にもそんな違うことやってるわけじゃないけど。でもこのやり方だと符号の理由がすごく見やすいね」
ユキは鍋の方に目線を戻してさらに続ける。
「ねえ兄さん。半角公式だけなら角の 2 等分線を考えるとベクトルの計算で簡単に出るって知ってる？」
「いや、知らない。そんなのがあるんだ」
「うん、そうなの。簡単だから後で説明するね。でもとりあえず、ご飯にしよっか。もう準備できるから兄さん、着替えてきなよ」
おまえが一方的にしゃべってるだけだろう、と内心苦笑しながら（話題を切り出したのは僕の方だった気もしたが）自室に戻り、夕食の準備をしてくる。

「「いただきます」」
本日のビーフシチューに温野菜、わかめの入ったグリーンサラダ、バターロールにバナナ入りのヨーグルトだった。
「こうやって並べてみると、なんだか変なメニューだね。洋食のサイドメニューは難しいの」
「そうかな？　十分だと思うよ」
バターロールをシチューに浸して口に入れる。少し甘くて少し辛い、まろやかな風味が口のいっぱいに広がる。
「たんぱく質がちょっと足りないかなって思ったの」
ユキの中では食事と言えば一汁三菜のイメージが強くて、シチューのような主菜兼汁物という料理は位置づけがうまく定まらないらしい。
と、食事の内容の話をしていたと思ったら、何の前触れもなくユキは別の話題を持ち出してきた。
「よく本に書いてある半角公式の出し方はコサインの倍角公式、」

$$\begin{aligned}\cos\theta &= (\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2\\ &= 2(\cos\theta)^2-1\\ &= 1-2(\sin\theta)^2\end{aligned}$$

「の $\overset{\text{変数}}{\theta}$ を $\overset{\text{半分の値}}{\frac{\theta}{2}}$ に置き換える方法なんだよね」

先ほどの話の説明なのだろう。事前に裏紙を用意しており、食事中でも何の遠慮もなく説明を始める。

いや、何の遠慮もないというのは厳密には違うか。僕がわざわざのぞき込まなくても読めるよう、普段よりも大きめの文字で式を書いてくれてはいる。

「つまりこういう式」

$$\cos\theta = 2\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2-1$$

「を $\overset{\text{半分の角度のコサイン}}{\cos\frac{\theta}{2}}$ について解いて、」

$$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \tag{2.5}$$

「って変形するの。同じようにして $\overset{\text{サイン}}{\sin}$ の方も」

$$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \tag{2.6}$$

「こうなるのがわかるよね」

バターロールを頬張りながらうなずく。とりあえずユキがとまらないことはわかりきっているので、僕も頭を切り換えて話を聞くモードになる。

こうして導けば根号の中の復号が $\overset{\text{マイナス}}{-}$ だったことは一目瞭然。というより、それ以外の可能性がそもそも出てこない。舞ちゃんとはずいぶん悩んだのにずいぶんあっけなく解決してしまうんだな。地味にショックだ。と言ってみたら、

「ううん。$\overset{\text{三角関数}}{\cos\theta}$ は負にもなるの。だから $\overset{\text{マイナスコサインが正}}{-\cos\theta>0}$ になることもあるのね」

「あ、そうか。でも $\overset{\text{もとの角度のコサインが正}}{\cos\theta>0}$ ならマイナスになるんだよね」

「そうだね。そうやって一つ一つ、式の形を見ていけば、どの角度のときに符号がどっちになるかがわかっていくの」

ユキはシチューを飲み込んでさらに続ける。

「$\overset{\text{どっちの式でも根号}}{\text{(2.5) と (2.6) で }\sqrt{}}$ の外に $\overset{\text{復号}}{\pm}$ が現れるのは、$\overset{\text{シータ}}{(\cos\theta,\sin\theta)}$ のところに行くのに $\overset{\text{一周余計に回る}}{\theta\text{ が }360^\circ\text{ 増える}}$ と $\overset{\text{半角ちょうど反対に来る}}{\theta/2\text{ は }180^\circ\text{ 増える}}$ ってことから出てくるものなのね。$\overset{\text{もとの角が一周以上してない}}{0\le\theta<360^\circ}$ の場合には、$\overset{\text{逆回り}}{\theta'=\theta-360^\circ}$ を考えると $\overset{\text{もとの座標は同じ}}{(\cos\theta',\sin\theta')=(\cos\theta,\sin\theta)}$ だけど

$$\overset{\text{半角は逆の位置に来る}}{\left(\cos\frac{\theta'}{2},\sin\frac{\theta'}{2}\right)=\left(-\cos\frac{\theta}{2},-\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

になってるって思っても良いね。

で、$\overset{\text{根号}}{\sqrt{}}$ の外の復号はともかくね、$\overset{\text{sin と cos の半角公式}}{\text{(2.5) と (2.6)}}$ を見比べると、$\sqrt{}$ の中の $\overset{\text{コサインの項}}{\cos\theta}$ の符号が入れ替わっただけなのがわかるよね」

そう言われて、$\overset{\text{その式}}{\text{(2.5) と (2.6)}}$ を改めて見る。確かにユキの言うとおりだ。

「このやり方だと結果を見比べて初めて、気付けるだけなんだけど、$\overset{\text{兄さんたちの出した式}}{(2.1)}$ だと

$$
\begin{aligned}
(\sin\theta)^2 &= (2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2))^2 \\
&= 4\,(\sin(\theta/2))^2\left(1-(\sin\theta)^2\right) \\
&= 4\left((1-\cos\theta)^2\right)(\cos(\theta/2))^2
\end{aligned}
$$

ってなって、 $\sin(\theta/2)$ も $\cos(\theta/2)$ も

$$(\sin\theta)^2 = 4(1-X^2)X^2$$

の解になるってことがわかるでしょ」

ほんとだ。えーっと、つまり……$\sin(\theta/2)$ や $\cos(\theta/2)$ についての方程式を作ろうとしてるわけだな。どちらの場合もスタート地点は同じで、$X=\sin(\theta/2), Y=\cos(\theta/2)$ と書くと

$$
\left.
\begin{array}{rcl}
4X^2Y^2 &=& (\sin\theta)^2 \\
X^2+Y^2 &=& 1
\end{array}
\right\} \tag{2.7}
$$

という連立方程式を考えることになる。これから Y を消去すると $\sin(\theta/2)$ の方の方程式を導出できて、X を消せば $\cos(\theta/2)$ の方の方程式が出てくるんだな。(2.7) で X と Y が対称だから片方の未知数を消去した結果、同じ 1 変数方程式が出てくるということか。

「だから $(\sin\theta)^2 = 4(1-X^2)X^2$ を X^2 について解いて出てくるのがね、1 つは $(\sin(\theta/2))^2$ で、もう 1 つが $(\cos(\theta/2))^2$ になるの。

半角公式の (2.5) の左辺と (2.6) の左辺が $\sqrt{}$ の中の符号以外同じになることが 2 次方程式の解の公式からわかるのね。これが今日、私が気付いたことなの」

はあ……あれを一瞬見ただけでそこまで考えられるのか。やっぱりユキはすごい。

「まあこれはちょっとした気づきみたいなもので、知ったからってそれでどうなるものでもないけどね」

まあそうかもしれない。単純な式変形で遊んでいただけ、と言ってしまえばそれまでの話だ。

「で、ベクトルを使った半角公式の直接証明に移ろうか。まあ長さ 1 のベクトル同士を足すと真ん中の方向が出てくるってだけの話で、やること自体はすごく簡単なんだけどね。でも式を書く場所がなあ。こんな大きい字で書いてると 1 枚の紙で収まらないから見にくいかな。ご飯の後でまた説明するね」

その後もスプーンをゆっくり動かしつつ、僕たちはとりとめもない話題で談笑しながら夕食をいただいた。

2.7 自宅にて 後編

夕食の食器を片付けた後、風呂にお湯が溜まるのを待つ時間。ユキに

「半角公式の導出をするの」

と言われたので説明を聞くために僕たちはリビングで隣り合って座った。

ユキは用意した紙に横方向と縦方向に軸となる 2 本の直線を引き、それらの直線の交差点を中心とした円を描く。

「昨日は 2 次元のベクトルは平面の点だって言ったけどね、今日は原点から別の点まで伸ばした線分のこともベクトルって呼ぼうと思うの。線分の終点が平面上の点だからね、原点から出発する線分って意味のベクトルと、平面上の点とは一対一に対応するからね」

n 次元のベクトルは n 次元空間の点、 $n=2$ のときには平面上の点。それが一つのとらえ方だが、それ以外の見方もいろいろある。と、いうことをユキが昨日言ってたが、別の見方の一つが線分ということだろうか。

「平面の点を線分にとらえ直すって言っても、別に大した意味はないの。角度の操作をベクトルの演算でとらえたいだけなのね。

半角公式って、θ（シータ）って方向の三角関数の値から $\theta/2$（その半分）の方向の三角関数の値を求める関係式だよね。だから半分の角度ってものをベクトルを使って作れば半角公式が出てくるの」

へえ？

「角度が θ だけ違うベクトルとして $(1,0)$ と $(\cos\theta,\sin\theta)$ を考えてみようか」

2 つある横軸と円周の交点のうち、右側のものの近くに $(1,0)$ と記し、さらに円周上の適当な一点に印を付けてその脇に

$$(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$$

と書き込む。

「(x,y)（これ）は三角関数の定義から方向は θ で長さは 1 だよね。円周上の 2 点はどこも原点から距離が同じだから、$(1,0)$（横軸の単位ベクトル）——単位ベクトルっていうのは長さ 1 のベクトルのことね——と $(\cos\theta,\sin\theta)$（このベクトル）とを足したベクトルを考えると」

ユキは (x,y) から真横右方向に長さ 1 の線分を引き、さらにその終点と $(1,0)$ を結ぶ線分を書き込む。そして新たに書き加えられた 2 本の線分共通の端点の脇に

$$(x+1,y)$$

と書いた。原点と $(1,0)$ を結ぶ線分、原点と (x,y) を結ぶ線分と合わせて、ちょうどひし形になる。

「$(x+1,y)$（和のベクトル）が表す線分は (x,y) と $(1,0)$（この 2 本の線分）のなす角を 2 等分してるよね」

確かに。ひし形の対角線は角の 2 等分線だ。僕はうなずく。

「$-180^\circ<\theta<180^\circ$（基点の反対方向を超えない限り）は $(x+1,y)$ の方向（これ）がちょうど半分の角度だから、$(x+1,y)$ の方向の長さ 1 のベクトルを考えたら良いの。そこを越えると角の二等分が逆になっちゃうから符号を調整しないといけないけどね」

ふむ、食事中に言っていたことだな。半分の角度には x 軸の正（基準）方向からどっち回りで行くかによって二通りの方向があり得る。$(x+1,y)$（今作ったベクトル）は半角のうち 180° 未満になる（基準方向から最も近い）方なんだな。

「でも $-180^\circ<\theta<180^\circ$ の（その範囲に収まってる）場合には、$(x+1,y)$（こ）の方向の半直線と円弧の交点が $(\cos(\theta/2),\sin(\theta/2))$（の座標が半角の三角関数値）なの。$\sin(\theta/2)$（この第 2 座標）を y（もとの点の第2座標）だけで書いたのが (2.3)（兄さんたちがやったこと）だよね」

なるほど、確かにそういうことになる。僕はうなずいた。

「その式を導出してみるの。まず $(x+1,y)$（この点）と原点の距離だけど、それは」

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

「だよね。計算すると」

$$\begin{aligned}
&=\sqrt{x^2+2x+1+y^2}\\
&=\sqrt{2x+1+(x^2+y^2)}\\
&=\sqrt{2x+2}
\end{aligned}$$

「だね。$\sqrt{2x+2}$（これ）が 0 になるのは $x=-1$（180 度）のときだけだから、$\sqrt{2x+2}$（この長さ）で割って長さ 1 にするのは $-180^\circ<\theta<180^\circ$（今考えてる範囲）ではいつでも大丈夫なの。だから円弧と角の 2 等分線との交点は」

$$(\cos(\theta/2),\sin(\theta/2))=\left(\frac{1+x}{\sqrt{2x+2}},\frac{y}{\sqrt{2x+2}}\right)$$

「になるの。 $\overset{\text{第2座標}}{\sin(\theta/2)}$ を計算してみると」

$$
\begin{aligned}
\sin(\theta/2) &= \frac{y}{\sqrt{2x+2}} \\
&= \frac{y}{\sqrt{\pm 2\sqrt{1-y^2}+2}}
\end{aligned}
$$

「だね。 $\overset{\text{根号}}{\sqrt{\;}}$ の中の $\overset{\text{復号}}{\pm}$ は $\overset{x\text{が正}}{x>0}$ なら $\overset{\text{プラス}}{+}$ だし、 $\overset{x\text{が負}}{x<0}$ なら $\overset{\text{マイナス}}{-}$ だね。 $\overset{0}{x=0}$ の場合はどっちでもいいね。

$\overset{x\text{はもとの角のコサイン}}{x=\cos\theta}$ だから 90° を境にどっちをとるかが変わるのね。兄さんたちは $\overset{\text{鋭角の場合}}{0^\circ<\theta<90^\circ}$ を考えてたから、あの状況なら $+$ かな。その式と同じになってるのを確かめるには、分母の有理化をして整理すればいいね。ここからはもう完全に式の世界。符号に注意しながら見ていくの」

$$
\begin{aligned}
&= \frac{y}{\sqrt{\pm 2\sqrt{1-y^2}+2}} \\
&= \frac{y\sqrt{1\mp\sqrt{1-y^2}}}{\sqrt{2(1\pm\sqrt{1-y^2})}\sqrt{1\mp\sqrt{1-y^2}}} \qquad \text{（復号同順）} \\
&= \frac{y\sqrt{1\mp\sqrt{1-y^2}}}{\sqrt{2[1-(1-y^2)]}} \\
&= \frac{y\sqrt{1\mp\sqrt{1-y^2}}}{\sqrt{2y^2}} \\
&= \frac{y}{|y|}\sqrt{\frac{1\mp\sqrt{1-y^2}}{2}} \\
&= \frac{y}{|y|}\sqrt{\frac{1}{2}\mp\sqrt{\frac{1-y^2}{4}}} \\
&= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\mp\sqrt{\frac{1-y^2}{4}}} \qquad \text{（復号自由）}
\end{aligned}
$$

と、ここまで書いたところでユキは風呂のお湯を止めに行った。

僕はユキの書いた式をじっとながめていた。戻ってきたあいつの、

「こんな感じでね、半角公式が出せるの。じゃあ私、お風呂入ってくるね」

という言葉にも生返事になる。

２行目の分子と分母に $\sqrt{1\mp\sqrt{1-y^2}}$ をかけているのは $\overset{\text{分母の内側の平方根}}{\sqrt{1-y^2}}$ の $\overset{\text{根号}}{\sqrt{\;}}$ を分母から消すのが目的か。平方の差の因数分解の式

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{1-y^2}+1)(\sqrt{1-y^2}-1) &= (\sqrt{1-y^2})^2 - 1^1 \\
&= 1-y^2-1
\end{aligned}
$$

みたいな変形で平方根を消したいんだな。でも平方根の中身は負になるといけないから、$\sqrt{1-y^2}\leq 1$ ってことを考えて、$\sqrt{1-y^2}\mp 1$ でなくて $1\mp\sqrt{1-y^2}$ の平方根をかけているのか。

なんとなく式変形を追うのは簡単だが、ちゃんと意味のある式になっているのか、一応ちゃんと確認してみよう。

$\overset{y\text{は三角関数の値}}{y=\sin\theta}$ だから $\overset{\text{絶対値が1を越えることはない}}{|y|\leq 1}$ 。なので $\overset{\text{内側のルートの中身が負になることはない}}{1-y^2\geq 0}$ ではある。だから $\sqrt{}$ の中身については何も問題はない。

だが $\overset{y\ \text{が}\ 0}{y=0}$ の場合、分母に $\overset{\text{ゼロ}}{\sqrt{1-\sqrt{1-0^2}}}=0$ をかけることになってしまうな。んーと、$y=0$ は $-180^\circ<\theta<180^\circ$ の範囲では $\theta=0^\circ$ のときだけか。この場合は $\sin\frac{0^\circ}{2}=\sin 0^\circ=0$って答えは簡単に出るし、

$$\overset{\text{最後の結果に代入しても0}}{\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1-0^2}{4}}}=0}$$

だから答えは正しいのか。でも導出は一応別扱いしないといけないんだな。

そして分母に2つある $\overset{\text{ルート}}{\sqrt{}}$ を1つにまとめて $\overset{y\text{の2乗の平方根を}y\text{の絶対値}}{\sqrt{y^2}=|y|}$ を使ってる。そうか、$\overset{\text{平方根記号}}{\sqrt{z}}$ は2乗すると $\overset{\text{中身}}{z}$ になる正の実数だもんな。だから絶対値が付くのか。

カラララ、と浴室の扉を開く音がした。

うん。$-180^\circ<\theta<180^\circ$ という範囲では大丈夫そうだ。

で、得られた結果を改めて見てみると、確かに $\overset{\text{舞ちゃんと一緒に書いたノート}}{(2.3)}$ と同じ形になっている。外側の復号は $-180^\circ<\theta\leq 0^\circ$ では $-$ がとれて、$0^\circ\leq\theta<180^\circ$ では $+$。内側の復号は $-90^\circ\leq\theta\leq 90^\circ$、つまり $|\theta|\leq 90^\circ$ で $-$ にとれて、$90^\circ\leq|\theta|<180^\circ$ では $+$ になる。

あのときは 60° とか 30° とかの正の鋭角でやってたから、外側が $+$ で内側が $-$ になってたのか。なるほど。

「お先でした、兄さん」

改めて全体をながめ直していると髪を拭きながらユキがリビングに入ってきた。つやつやである。

僕は思考を中断して計算用紙をまとめ、お風呂をよばれることにした。

3　はじまり

3.1　２度目の部活見学　１

それから二週間ほどの間は、一言で言えば新しい生活に慣れるのに必死だった。

なんと言っても片道一時間の通学が体力を大きく奪うのだ。

新しい友人を作り、放課後の過ごし方（つまり部活動など）を決める。ただでさえ通学に体力を奪われる中でも、今やらねばならないことである。

幸運なことに高校での新しいクラス内のつながりと同じ中学から進学してきた友人同士のつながりとをうまく入り交ぜて、新しい交友関係を作っていこうとする雰囲気に学年全体がなっていた。おかげで積極的に声をかけるタイプではない僕も交友関係を一気に広がった。

誘われて新しい友人と放課後遊びに行く機会もあった。

舞ちゃんのクラスの広瀬さんという女生徒の家が犬里駅の近くで喫茶店を営んでいるらしく、十数人のちょっとした集団でその店に押しかけたりもした。ほぼ貸し切り状態である。

広瀬さんはその席で犬里の地図を広げて、高校生が使いそうな店をみんなに紹介していた。

カラオケやボーリングなどの大衆娯楽施設やファミレスやファストフード店の話もあったが、そもそも犬里にはそんな店は絶対数が多くない。どちらかと言えば個人経営の食堂や同業の喫茶店の話がメインで、どこの店は内装がどんなで、どこの店は何がおいしいとか、ここの店が安いとか、実に多彩かつ詳細な情報を教えてくれた。さすがに地元の、しかもお商売をしている家の子である。

広瀬さんの詳細な喫茶店語りに対抗して、遠方から通っている別の生徒が自分の街のことを話し出した。そこから地元紹介、ならぬ地元自慢大会が始まり大いに盛り上がった。

ちなみに広瀬さんは普段から喫茶店の手伝いをしているらしく、いつでも来てね、とアピールすることも忘れない商売魂たくましい少女のようだ。

この２週間でわかったこと（というより“なぜかそれまで知らなかったこと”と言うべきかもしれない）がいくつかある。

まず犬里の部活数は大して多くないということである。学外に活動場所がある地域のサークルへの参加を学校側が推奨、場合によっては斡旋していることも関係あるのだろう。

グラウンドで活動しているのは陸上部しかないし、体育館で活動しているのはバスケット部とバドミントン部のみ。それ以外ではテニス部くらいしか運動部はない。

文化部はそれよりは多いが、数学部と文芸部を除けば特別教室の数しか部活はないようである。

敷地内にある施設は学内外の人に有効に活用してもらい、学校にないものは外部の施設を利用させてもらう。そういう発想で運営されているのだろうか。部活存続のために必要なメンバー数がゆるいのも、その辺りと関係があるのかもしれない。

ちなみに文芸部は図書室の隣。数学部室は文芸部室の隣である。これも図書室という特別教室（？）に付属する部活という位置付けなのかもしれない、などと思ったりもしたが真実の程は定かではない。

次に挙げるべきは制服の着用が必ずしも義務づけられていないことだ。入学式や卒業式の他、始業式や離任式などの式典のとき、修学旅行や職場体験などの学校行事として学外に出るときを除いて服装は自由なのだそうだ。

実際に上級生の約半数は制服を一切着用しておらず、一年生でも既に２割は完全私服である。そうでなくても上着だけは私服という人は結構いる。

舞ちゃんは言うまでもなく全身ジャージに身を包むようになり、結構目立っていた。ジャージに着替えると同時に部活探しもやめたようである。

話がいろいろ逸れたがそんな感じの学校生活、寝込むほどではないが最初のうちは疲労が蓄積していくのを強く感じた。だがというかその結果というか、帰宅後も身体は興奮状態にあり、下らない雑談にユキを巻き込んで、毎日のように夜更かしをしてしまった。

高校が定めた部活の体験期間は４月の第４週まで。僕たちがいた中学では約１週間しかなかったので、それに比べるとかなり長めだ。

気になる部活には大体見学に行った。地域のサークルにも興味がないわけではなかったが、放課後に別の活動拠点へ移動しなければならないことを思うと、通学時間との兼ね合いで心理的ハードルが高かった。明確に惹かれるサークルが見つかったら、そのときに見学に行かせてもらうことにしよう。

そして４月も下旬になった頃、僕は再び数学部の部活見学にやってきた。

「接空間に正定値対称線形形式の構造を付加した多様体をリーマン多様体という。内積の構造は平坦な空間における大きさを表すためのものであったが、各点の接空間に内積構造があれば、曲線に沿った微小変化を観察することで球面のように近くにまとまった様子や、その逆に双曲面のように反り返り広がりを見せるような空間の構造の、局所的な情報を読み取ることができる。

……かーっ、だからなんだって話！　いやそれはそれで普通に大事だろうが、曲がった空間はいいんだよ。俺が今知りたいのはその前の、真っ平らなとこなんだよ。“大きさを表すため”とかじゃなくて、もっと踏み込んだ説明はないのかよ内積の！」

２週間ぶりに数学部の部室を訪ねると「多様体入門」と書かれた本を片手に籐椅子に倒れ込んで絶叫していた。他には人の姿はない。

「秋月くん」

声をかけると顔を上げた。目が合うと表情を改め、叫んでいたなんて事実はなかったかのようにさわやかな笑みを浮かべて本を閉じる秋月くん。

「おう、建也。ここに来るのはずいぶん久し振りじゃないか」

「他の部を巡ってたんだ。結局、入ろうと思ったのはなかったけど」

「ってことは入る気になったのか？　邪道数学部」

僕は適当な長いすに腰掛ける。

「まあ、前向きに検討中って感じかな。他には入部希望者は来た？」

「見学はちらほら来たけどな。どんだけ入るかはわかんねーな。あと、校外部員の大学生とか、顧問の先生にも会ったぞ」

秋月くんはそこで言葉を区切り、なぜかにやにやする。

「そうそう。お前が全然来ない間に円の面積の方の問題に取り組んでたんだよ。サヨちゃんがまとめたノートがあるぜ。

そう言って僕に“ 邪道数学部活動記録 ”を手渡してくれる。

４月〇〇日

$\boxed{\text{問題}}$

単位円の面積はなぜ π なのか？　小学校でそうなると教えられて以来証明を見たことがない。証明を与えよ。

$\boxed{\text{結論}}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が証明できればよい。

理由：半径１の円のうち、中心から角度 θ の部分を切り出した面積を $S(\theta)$ と書くことにする。明らかに $S(\theta)$ は θ に比例するので $S(\theta)=a\theta$ のように書ける。

$S(2\pi)=\pi$, つまり $a=1/2$ が示したいことである。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して

$$\frac{1}{2}\sin\theta<S(\theta)<\frac{1}{2}\tan\theta=\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{3.1}$$

が成り立つ。この式は教科書でも三角関数や微分の章でよく見るものである。つまりＯを中心とする単位円周上に２点Ａ，Ｂを $\angle$ ＢＯＡ $=\theta$ となるようにとる。そしてＯＢの延長線とＡにおける単位円の接線との交点をＣとおくと、円弧ＢＡに当たる部分の扇形は三角形ＯＡＢを含み、ＯＡＣに含まれる。面積を比較することで

$$\text{ＯＡＢの面積}=\frac{1}{2}\sin\theta<S(\theta)<\text{ＯＡＣの面積}=\frac{1}{2}\tan\theta$$

となるのである。

(3.1) の３辺を θ で割ると

$$\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}<a<\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\theta}\frac{1}{\cos\theta}.$$

が得られ、$\cos 0=1$ なので極限を考えると

$$a=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

となるので。

でも……$\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ は三角関数の微積分計算の基礎になる性質だけど、$S(\theta) = \frac{\theta}{2}$ を使って証明するのよね。教科書だとそうなってる。

微積分が使えれば $S(2\pi) = \pi$ はなんとでも証明できるけれど、微積分を展開するために $S(\theta) = \dfrac{1}{2}\theta$ を別の方法で証明しておかないといけないなんて……。

感想。まず細かいことを 2 点。

単位円周上の弧の長さで角度を表す弧度法で書いてある。一周を 360 とする度数法は、約数が多いという人為的な理由で一周の値を定めた表記法だ。それに比べると一周に円周の長さという 2π をあてる弧度法の方が自然な書き方ではある。こっちの表記の方がスタンダードなのだろうか？

２点目。limってなんだ？　だが知らない記号に出会うなんてユキに付き合ってると日常茶飯事だ。まあ気にしないことにしよう。

何より強く思考の網に引っかかったのは、$\overset{\text{扇形の面積を評価する最初の式}}{(3.1)}$ だ。単位円周の長さの $\overset{\text{内接・外接多角形}}{I(n) \text{ と } A(n)}$ による評価式と似てないか？　$I(n)$ と $A(n)$ の明示式は

$$I(n) = 2n\sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$$
$$A(n) = 2n\tan\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$$

だった。これから円周率の大きさを評価する

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{I(n)}{2} < \pi < \frac{A(n)}{2} = n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \tag{3.2}$$

という式が出てきたんだった。もちろん $\overset{\text{外接多角形が長い}}{\pi < A(n)}$ というのは、正しいか不明な式であるが。

円の一周を $2n$ 等分して同じ大きさの扇形に分けて、断片を全部集め直せば当然のことながら円に戻る。$\theta = \frac{2\pi}{2n}$ の場合の $\overset{\text{ノートの扇形の面積の評価式}}{(3.1)}$ を $2n$ 倍すると円の面積の評価式になる。

$$2n\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right) < 2n\cdot a\frac{2\pi}{2n} < \frac{1}{2}\tan\left(\frac{2\pi}{2n}\right) \tag{3.3}$$

弧度法と度数法、どっちかに合わせないと全然違う形になってしまうな。円周の長さがわからない、なんて文脈で角度に $\overset{\text{単位円周の長さ}}{2\pi}$ みたいな数を使うのはなんとなく嫌だから度数法に直してみよう。ついでに約分して整理すれば $\overset{\text{円の面積の評価式}}{(3.3)}$ は

$$n\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < 2a\pi < n\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

になる。$a = \dfrac{1}{2}$ なら $\overset{\text{円周率の評価式}}{(3.2)}$ そのままだ。

3.2　２度目の部活見学　2

秋月くんにそのことを説明しようとしたとき、カラカラと部室の戸が開く音が聞こえた。

振り返るとブレザーの女の子とスーツの女の子が談笑していた。ブレザーを着ているのは宮原先輩として、スーツの方は……和奏先生じゃないか。

「あら、本庄くんじゃない。ここで会うのは初めてだね」

とっさに反応できずにいると、秋月くんがこちらに近寄ってきて、

「顧問な、和奏ちゃん」

と僕の耳元で教えてくれる。ニヤニヤした顔で。

まさかうちの担任が顧問だとは思わなかった！　……と、僕が驚くのを期待したのかもしれないが、可能性は十分ある。犬里にいる数学の先生なんてそんなに多くないんだから。

……まあ、冷静に考えればそうだが確かにびっくりはしたけれど。いきなりだったし。

和奏先生は新学期早々、生徒にとても人気である。理由はいろいろあるだろうが、大きいのはやはり同年代のような外見と距離感を感じさせない態度だろうか。あと、しゃべり方。心地よく響く声質と抑揚で、耳と心にすんなり入ってくる。

秋月くんに限らず生徒の間では、親しみを込めて和奏ちゃんと言われてることが多い。本人に向かって呼んでいる場面は今のところ見たことないけれど。

そんな和奏先生が今年度から数学部の顧問に就任したらしい。去年までの顧問の先生は別の学校に異動になったのだそうだ。

「本庄くんは一度数学部の見学に来てたんだよね。入部する気になったの？」

秋月くんと同じことを訊いてくる和奏先生。秋月くんに答えたのと同じように、検討中ですと伝える。

「入ってくれたらうれしいけど、無理には誘えないわね。でも本庄くん、また来てくれてうれしいわ」

ふんわりと微笑んで僕の手元をのぞき込んだ宮原先輩は、

「あ、そのノート読んでくれた？　全然来てくれないから、あの問題、勝手に考えてたの。と言っても、ほとんど進んでいないのだけれどね」

とうれしそうに話す。

「全然。僕のことなんて気にしないで下さい。でもそのことで今、ちょうど思い出したんですけど……」

僕は秋月くんにしようとしていた説明を宮原先輩と和奏先生にも一緒に聞いてもらうことにした。

「あー、確かにな。ってことはこれが π（円周率）の定義なのかもな」

「え？　円周率って円の直径と円周の長さの比じゃないの？」

「いやだから円周の、つまり曲がった線の長さってなんだって話だよ。長さの定義がこれなのかもしれないなって。リアルな世界でも移動距離とかってさ、俺たちの頭の中のイメージしかないっていうか。物理的に数がその辺に浮かんでるんじゃなくて、『４ｋｍ（ヨンキロ）歩いた』みたいな言葉があるだけだろ？」

歩いた道の長さには絶対的な基準があるわけではない。僕たちが４ｋｍ歩いたと認識して初めてそうなるということか？　哲学的なことはよくわからないが、でもそれは真っ直ぐな道の場合でも事情は同じのような気がするのだが。

首をかしげていた僕の態度を見てか、和奏先生が補足説明をしてくれる。

「数学の世界で、言葉で表現しようとすると、何（なに）であっても定義がないと困るよね。読み方で解釈が変わったりしない、厳密な定義がね。解釈がいろいろあると出せる結論も、みんなで共有できるものじゃなくなっちゃうからね。

もちろん言葉の表すもののイメージと合わないと、適切な定義とは言えないよ。長さならまず第一に、曲線ごとに定まる非負の実数であること。他にも、二つの曲線をつないだ曲線の長さはもとの曲線の長さの和になってること、とかね。長さの定義には長さらしさがなくちゃいけないと思うよ。

秋月くんが言ったのは、線分の長さは端点間の距離を表す実数だ、っていうのが自然だろうってことだよね。２点間の距離は座標を使った定義がもうあるからね。それで線分の長さの適切な定義は一つに決まっちゃうってことだね」

いつも授業で聞いている和奏先生の、抑揚の付いた声を頭の中で反芻する。

(x_1, x_2) と (y_1, y_2) という２点を結ぶ線分の長さ。長さという言葉はイメージを伝えるには便利だが、

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

という式ほどには、その意味ははっきりしない。“ 長さ ”というイメージを伝える言葉は、いつでもこの式が表す数を指すのだという約束。意識的にそう認識して、その認識を共有すること。それが長さという言葉に“ 定義を与える ”ということ、か。

「ああ、そうです。そういうことが言いたかった。先生ありがとうございます。で、和奏先生が言ったような、つないだ線の長さはもとの線の長さの和になるべきだってことと、線分の長さは端点の距離ってことからさ、多角形の周の長さは一通りしかあり得ないだろ。でもな、曲がった部分が少しでもあると、長さって何よって話」

「えっと、ちょっと待って」

線分の長さは端点の距離で定義する。線分を 2 本つないだ曲線、(x_1, x_2) と (y_1, y_2) を結んだ線分に、(y_1, y_2) と (z_1, z_2) を結んだ線分を合わせたもの、曲線と呼ぶのはなんか変な感じだな、折れ線とでも呼んでみるか？　この折れ線の長さは

$$\overset{\text{それぞれの線分の長さの和}}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}+\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2}}\text{。}$$

まあこれ以外に、長さと呼ぶにふさわしい実数の候補は考えにくい。線分をたくさんつないだカクカクしたものについても同じように、長さは 1 本 1 本の線分の長さを全部足したもの、というのが唯一の適切な定義の候補。

多角形というのは最初の線分の出発地点が最後の線分の終点になってるものってことで、折れ線の一種だというみなせるということだな。

で、曲がったところがあると……？　ああ、そうか。カクカクの場合は長さがはっきりした線分に分けてしまえば良いけど、曲がってると断片を取り出してもやっぱり長さがはっきりしないということか。

大丈夫、続けて。と先をうながす。

「で、曲がったやつも含めて、長さって呼んで違和感のないものを定義するにはどうすれば良いか？　ってことな。その一案で、途中のいくつかの点を結んでできるジグザグの長さの上限ってのはどうなんだ、って言いたかったわけだ」

折れ線は長さがはっきりする。でも曲がった部分があるとはっきりしない。円周みたいなきれいな曲線だって例外じゃない。それで $\overset{\text{評価式}}{(3.2)}$ を円周の長さの定義にしてしまおうって言ってたのか。つまり、

「 $\overset{\text{円周の長さ}}{2\pi}$ は $\overset{\text{内側の多角形の長さ}}{I(n)}$ のどれよりも大きくて、 $\overset{\text{外側の多角形の長さ}}{A(n)}$ のどれよりも小さいような実数として定義するってこと？」

どんな $x > 0$ に対しても、それに応じて $A(n) - I(n) < x$ となる自然数 n が存在することから（内接多角形の周長と外接多角形の周長が近づいていく）、そういう実数の値がいくらでも正確にわかる。つまり一つに定（き）まる。だから厳密な定義になるわけだ。

「違う違う。それは定義から導かれるべき性質で定義じゃねえ。

そもそもな、円周だけに通用する定義ってもの不自然だろ。建也が今言ったのは円以外にも使える定義か、って考えたら厳しいと思う。

お前が言ってたことだが、狭い範囲で思いっきりグネグネ曲がってる曲線の場合、外側を少ない寄り道でカクカク進んでった方が短くなるだろ？　グネグネならその長さが決まってねえうちはまだ良いが、カクカクの折れ線だと長さの値は決まっちまうからな。外側のジグザグの方が短くなる具体的な証拠が作れちまう」

んーと、ちょっとついていけない。

円周の長さを考えていたのだが、長さの定義が不明であると。うん、まあそれは良いことにする。

円周よりも外接多角形の周の方が長いとすれば、それは円周がきれいな曲線だってことが根拠になってるはずだと以前思った。

［内側をグネグネ曲がりながら進むのと、外側を真っ直ぐ進むのだと、外側の方が短いことってありますよね］

初めて部活見学に来たときに食堂で僕自身が言ったことだ。きれいな曲線がどんな曲線のことかはわからないが、なんであれ適切な定義の下では外接多角形よりも長い曲線というのは間違いなくある。だから外接多角形よりも小さい数、というのを長さの定義にするわけにはいかない、秋月くんが言っているのはそういうことだろうか。

「そもそも、内側とか外側ってのがはっきりしてるのはループになってる曲線だけだろ？　俺が言いたかったのはな、えーっと、こういうことだ。曲線があったらその中間点を適当にとって、それ順番につないだ折れ線がいろいろ出てくるだろ。その長さの上限をもとの曲線の長さにしたらどうかってことだ。そのやり方なら、どんな曲線でも何か実数が定まるだろ。端がある糸みたいに外側とか内側とかいうのが考えられねえものも例外じゃない。

円周の場合は $\overset{\text{内接正多角形}}{I(n)}$ ってのは中間点を結んだ折れ線の一例だ。 $\overset{\text{円周の長さ}}{2\pi}$ は

$$\overset{\text{どんな内接正多角形よりも長い}}{I(n) < \pi}$$

ってことが適切な定義には必要だと思う。で、これを正多角形以外にも途中の点のとり方をいろいろ考えて、そのどれよりも大きい中で最小の実数を、円周の長さの定義にしねえか？　ってこと。

それでもし直観に合わないことがちょっとでも起こるなら、この定義は適切じゃなかったってことになる。そのときはまた別の定義を考えねえとな」

正直、秋月くんの話は難しくて理解が追いついていない。

でも……定義の案ではあるけれど、それが決定版かはわからない、か。

適切な定義を与えるのは簡単ではないと、ユキも以前言っていた。

［誤解の余地をなくすために定義を与えることは大切でね。そしてときとして一番難しいところなの。もちろん定義はゴールじゃないし、定義に基づいてその後に何ができるか模索するのも大変だけど、でもそこはある意味で自動的なのね。少なくとも議論の正しさは、ちゃんとやれば間違いなく伝えることができるからね］

長さという概念も、定義の善し悪しを検討するのが難しいものの一つ、そういうことなのだろうか。

「その定義、確かに一つの案ではあるわよね」

あごに指を添えて何やら考え込んでいる様子の宮原先輩。秋月くんの言葉を吟味するようにつぶやく。

「滑らかな曲線の場合には線分の長さの和と、速度ベクトルの大きさの積分は多分一致するわよね。接ベクトルの長さと、曲線の途中をつないだ線分の長さとの誤差が、各部分で 2 次のオーダーになるでしょうし。だから全部を足し合わせたものが 1 次のオーダーで誤差が減少していく、そんな感じかしら」

言ってることは全く理解できないが、どうやら秋月くんの定義に賛成しているらしい。

ハッとして、恥じ入るようなややすわりの悪い表情で僕の方を振り返る宮原先輩。

「あ……今の話とは関係なかったわね。私、考え出すと周りが見えなくなるところがあるの。ごめんなさい、混乱させてしまったわね。今言ったことは忘れてくれて問題ないわ」

そして先輩は秋月くんの方に向き直り、続ける。

「もしその定義を採用したら、 $\overset{\text{単位円の半径が円周率}}{S(2\pi) = \pi}$ ということは、

$$\overset{\text{円 周 率 の 特 徴 付 け}}{n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < x < n \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

を $\overset{\text{円 の 面 積}}{x = S(360^\circ)}$ がみたすってことが証明になるのよね。定義式と言っても、本当は他の内接多角形より大きいことや、外接多角形が上からの評価になってることの確認もしないといけないのだけれど」

「ええ。細かいことは残ってますね。でも実質的な部分はかなりできてるんじゃないかと思いますよ。議論を重ねた結果として目標に到達するってのじゃなくて、定義した瞬間にほぼ終わってしまうっていうのは拍子抜けですけど」

苦笑混じりに、だがどこか満足そうに答える秋月くん。

「拍子抜けと言えばそうかもしれないわね。でも定義した瞬間が完成の時というのは数学ではよくあることだわ。

今回だって実際、この定義に到達するまでにいろいろ悩んだわよね。その過程でやっとブレイクスルーを見つけた。今の場合、曲線の長さの定義を与えることがそれね。それで一気に視界が開けたと思えば感動もあるんじゃないかしら」

なるほど、そういう見方もあるのか。

確かに、少なくとも僕にとっては、長さをどう定義するか？　なんてことは盲点だったし、（そして今でも頭ではなんとなく理解できていても心から納得できてはいないが、）そこに光が差してストーリーができあがったと思えば、定義を与える瞬間がクライマックスなのかもしれない。

細かいことの理解は全く追いついていない。だがそれとは別に気になることが一つある。

「定義の“案”ってことですけど、これで大丈夫って証拠を見つけることはできないんですか？」

「それは難しいんじゃないかしら。不都合が出たらそれで定義の不適切さがわかるわけだけど、どれだけ議論を重ねても不都合が出ないって保証はできないわよね」

「ですね。いろいろやってみてその範囲では問題が見つからなかった、だから暫定的にその仮説に則(のっと)って話を進める。科学ってそういうもんだろ。数学と科学は別ものかもしれねえけどさ」

完全な納得ができなくてもとりあえず進む、思えば多くのことは実際そうなのかもしれない。曲線の長さもその一つだと思っておくべきなのだろうか。

でも数学でそんな話の進め方をするなんて……いや、そういえばかつてユキが言ってたっけ。

［数学は厳密な学問だってよく言われるけどね。それは定義を決めたらその後は、証明っていう手続きの中でやっていいことと、いけないことがはっきりしてるってだけの話なの。定義の仕方はすごく自由度が高いところなのね。自由度が高いって言っても何でも良いってわけじゃないけどね。意味のある話は意味のある定義の上にしか見つからないと思うの］

学校の勉強が中心だった僕にとって、定義というのは約束事として与えられるものでしかなかった。いや、それどころかそこにあるのが当たり前すぎて、話の根底に定義というものがあるということすら認識していなかったような気がする。

ユキから、定義を模索した、みたいな話を聞いたことも確かにあったが、そのときは全く意味がわからなくてすっかり忘れていた。

数学という文脈の中で根拠が曖昧なまま話を進める、ということに対して感じる違和感。その正体は“数学は厳密な学問”であるという先入観なのだろうか。少なくとも定義の段階ではその思い込みは正しくなくて、だから定義の適切性が担保されなくても先に進まざるを得ないこともある、そういうことなのかもしれない。

自由度が高く、ときとして一番難しいところ。定義というのもなかなか奥が深いものなんだな。

3.3　２度目の部活見学　３

そのとき僕の携帯が震えた。舞ちゃんからのメッセージだった。

今何をしているかとの問い合わせだったので、数学部に来ていると返す。

返事が来る。舞ちゃんもこちらに来たいらしい。先輩に許可を求め、問題ないと返信する。

「楠乃も来るのか。せっかくだからあの子も一緒にさ、今の定義にしたがって、残った問題片付けちまおうぜ」

そう言って秋月くんが黒板の前に立った。好奇心旺盛な少年の顔に真剣みが混じる。

「じゃあ問題整理しますね。面積の問題は解決したと思って良いですよね」

宮原先輩がうなずく。あまり出しゃばるのは良くないと思っているのかもしれないが、和奏先生も小さくうなずいている。

「だから長さの問題だけなんですよね。長さに関してどんな問題が残ってるか、考えましょう。考えてるのは円の内接多角形と外接多角形ですよね。で、内接多角形の長さは円周より短いというのは今は定義に含まれてます。円周の長さを、内接多角形のどれよりも大きい実数、って明記してますから。だから問題は何もないですよね。

なので外接多角形です。こっちは定義には何も情報がありません。ですが、これが円周より長いってことは証明したい課題の一つです。本庄が作ったノートでも“最大の謎”と名付けられてたもので、最重要な課題です。

他にも解決すべき問題はありましたっけ？」

特にそれ以外の課題は誰からも挙がらなかった。

黒板の前で話す秋月くん。宮原先輩の凛とした雰囲気も素敵だが、秋月くんの楽しそうに目を輝かせながら話す姿もまた、先輩とは別種の魅力があった。

話ながら秋月くんが板書したことは以下の通りだ。

- 円の面積の問題

  解決済み（外接多角形の問題に帰着される）

- 円周の長さの問題
  - 内接多角形に関する問題

    なし

  - 外接多角形に関する問題

    外接多角形の周の長さは常に円周より長いか

「最重要とか言ったけど、外接多角形が円より長いって問題が全てだったんだな」

こうやってまとめてみると意外と残っている問題は少ない。印象としては暗中模索の感があったが、実際にはかなりゴールが近づいてるのかもしれない。

カラララララ。そう思いながら秋月くんの板書をながめていると勢いよく戸が開き、舞ちゃんが部室に入ってきた。

「こんにちはー！　またおじゃまします。あ、石崎先生もこんにちは。数学の先生ですもんね、よくここに来られるんですか？」

「顧問だからね。その割にはあんまり顔を出せてないけどね。楠乃さんもここには何回か来てるの？」

クラスが違うのに和奏先生にもう名前を憶えられていた。さすが存在感のジャージ娘である。

「まだ２回目です。前回も本庄くんに付き合ってって感じで」

「そうなんだ。仲良いんだね」

「い、いえ、そんなことはないですけどご近所さんなので。あ、お邪魔しちゃいましたかね。何かやってたなら、私に構わず続けて下さい」

舞ちゃんはわたわたと言った感じに教室を見回して、秋月くんの板書に視線を固定すると、すらりとそこを指し示す。

「お、そうそう。円に内接する正多角形の話、楠乃も本庄と一緒にやったんだよな。あんときの本庄の問題、かなり解決に近いと思うんで、残りもつぶしちまおうって話してたんだけどさ。楠乃も一緒にやろうぜ」

秋月くんは舞ちゃんに今までの話の経緯を簡単に説明した。

面積の問題は長さの問題に帰着されること。

長さの定義は円周の場合、内接多角形の長さを用いて定義してみようということ。
残った問題は外接多角形の周の長さが円周より長いことだけだということ。

3.4　２度目の部活見学　４

舞ちゃんへの説明を終えると秋月くんは黒板に書かれたことを全て消し、左上に改めて次のように書いた。

問：外接多角形の周の長さは常に円周より長いか

「証明したいのは外接多角形が円周よりも長いってことですけど、円周の長さを内接多角形の長さの上限って定義したんですよね。意味の区切りをまとめるとこんな感じですね」

円周の長さ := 「[“どんな内接多角形の長さ”よりも大きい実数] のうちで最小のもの」

「長さを知りたい外接多角形を一つ決めますね。それを P って書きましょうか。この定義だと、円周よりも長いってことは、[“どんな内接多角形の長さ”よりも大きい実数] だってことと、同じことなわけです。$\overset{\text{ニバイ}}{2\pi}$ はそんな数の中で一番小さい数ってのが定義ですから」

P：単位円の外接多角形
$\ell(\bigcirc) :=$ ○の長さ

$2\pi \leq \ell(P) \iff$ どんな単位円の内接多角形 Q に対しても $\ell(Q) \leq \ell(P)$

「つまり

“どんな円の内接多角形の長さを測っても、それが P の長さを下回ってる”

ってことが

“P の長さが $\overset{\text{円周の長さ}}{2\pi}$ 以上”

だってことそのものなわけですね」
うーん……そうなるのか？　円周という曲がった線の長さと比べようとしてたのが、内接多角形と外接多角形というカクカクしたものだけの話になってしまった。そこに違和感を覚えたのは僕だけではなかったようで、
「円周はどこにいっちゃったの？」
と、舞ちゃんがきょとんとした表情で訊いている。
「内接多角形ってのが、円の内接多角形だな。“どんな内接多角形と比べても P の方が長い”ってことを証明しなきゃいけないわけだが、比べる対象が円の内接多角形に限定されてる。そこに単位円の情報が残ってるわけだ」
というのが秋月くんの答えだった。
うーむ、そういうものか。そう言われると確かに残っているのか。
「“折れ線の長さの上限”を曲線の長さの定義にするってことは、長さって言葉を中間の点の間の、点同士の距離に全部書き直せって意味だからな」
「ふーん、言われてみればそうかも」

舞ちゃんは相づちを打つ。

「長さを比べるってことを定義通りに書き直せば、直接的には折れ線同士の長さを比べることになる。曲がった線は長さを直接的に比較する対象からは消える、それは長さの定義からの必然的な結果なわけだ」

「なるほどー。そう言われれば、確かにそうだね。でもなんか、不思議な感じ」

「まあな。でもこの辺は慣れるしかねえな。

さて、じゃあ P と比べる単位円の内接多角形を一つとりましょう。Qって名前を付けときますね。Q は単位円の内接多角形、P は円の外接多角形。P と Q に関してはそれ以外の情報は何もなし。これだけの情報で $\overset{Q\text{の長さ}}{\ell(Q)}$ が $\overset{P\text{の長さ}}{\ell(P)}$ より短いことを証明できれば良いってことですね」

P：単位円の外接多角形	Q：単位円の外接多角形
証明したいこと	$\ell(Q) \leq \ell(P)$

ここまで書いて少し離れて黒板をながめる秋月くん。

そのまま全員、しばらく誰もしゃべらなかった。問題が明確にはなったが、証明の方針がわかるかというとまた別なのだろう。

僕も改めて板書をながめてみる。外接多角形が円周より長いのはなぜか。その問いがずいぶんシンプルな式に集約されてしまった。カクカクの多角形の長さだけを比較する形で完結した問いになっている。秋月くんが言ったように円周という曲がった線は、“ 単位円の ”という P や Q にかかる修飾語として間接的に残っているだけだ。

「うーむ。$\overset{\text{内接多角形}}{Q}$ と $\overset{\text{外接多角形}}{P}$ が同じ形なら、相似だから、って理由で比べられるんだけどな。内接は $\overset{\text{サイン}}{\sin}$ になるし、外接は同じ角度の $\overset{\text{タンジェント}}{\tan}$ だからな。……分割を細かくした補助の多角形を考えるのか？　内接の方はそれで大きくなって、外接は小さくなる？」

秋月くんの言葉に宮原先輩がはっと顔を上げて小さくうなずく。

「そうよ、確かにそうなるわ。内接多角形の方は辺を増やすと、頂点から隣の頂点へまっすぐ行っていたのが別の頂点を迂回するようになるのだから簡単よね。外接多角形の方はちょっと計算しなきゃいけないけど、二つに分けるときを考えれば良いんだから、こういう式を証明できれば良いのよね」

先輩は後ろの黒板に歩み寄り、次のような式を書いた。

$$\tan\alpha + \tan\beta \leq \tan(\alpha+\beta) \tag{3.4}$$

「えっと、角度の条件は…… $\overset{\text{鋭角の範囲}}{0 \leq \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}}$ かしら」

$\overset{\text{アルファのタンジェント}}{\tan\alpha}$ と $\overset{\text{ベータのタンジェント}}{\tan\beta}$ の和が $\overset{\text{合わせた角度のタンジェント}}{\tan(\alpha+\beta)}$ を越えない？　そんなことが成り立つんだっけ。

「結局そうなるんですか？　……ああ、円との共有点の方向で分割すると確かにそうなりますね。でもそんなの考えなくても三角不等式からすぐわかりますよ」

「あら、そうなの？」

「ええ」

目を伏せて思案する先輩。

秋月くんは $\overset{\text{先ほどの式}}{(3.4)}$ は不要だと主張し、先輩はその理由を考えている。だが僕は全然ついていけない。(3.4) がいらない理由どころか式の成り立つ理由も、どうしてこんな式が出てきたのかすらさっぱりわからない。

それは僕だけではなかった。

「えっと……私、全然付いていけてないです」

舞ちゃんが戸惑っているようはははきはきしてるような口調で言葉を挟む。

「あ、すまん。んーと、順番に説明するな。サヨちゃんへの回答も自ずと含まれるんで、聞いててください。

さて、内接多角形の方から考えるか。多角形の形は頂点の位置で決まるだろ。だから $\overset{\text{内接多角形}}{Q}$ の頂点の個数を N とでも書くことにして、頂点の偏角を反時計回りに $\overset{\theta_1\text{ から }\theta_N}{\theta_1,\dots,\theta_N}$ って書くことにするな。

外接多角形の方は頂点じゃなくて、円と辺が接してるとこに注目する。接点の偏角を順に $\overset{\text{プサイイチからプサイエム}}{\psi_1,\dots,\psi_M}$ ってしとくか。

でな、このあともっと頂点を増やした内接多角形と外接多角形を考えるんだわ。$N+M$ 個の角度が出てきたけどさ、それを $\overset{\text{スタート}}{0^\circ}$ から $\overset{\text{一周する}}{360^\circ}$ まで、$\overset{\text{内接多角形の頂点の方向}}{\theta_1,\dots,\theta_N}$ と $\overset{\text{外接多角形の方向}}{\psi_1,\dots,\psi_M}$ を合わせて小さい順に並べて、それに改めて番号振り直す。$\overset{\text{ファイイチからファイのエヌプラスエム}}{\varphi_1,\dots,\varphi_{N+M}}$ って感じにな」

小さい順に並べる、と言われても $\overset{\text{内接多角形の角の位置}}{\theta_1,\dots,\theta_N}$ と $\overset{\text{外接多角形の角の位置}}{\psi_1,\dots,\psi_M}$ がどういう順に並んでるか、どんなパターンか全然わからないから想像しづらい。具体例で考えてみようか。

Q が x 軸から始まる正 6 角形だと $N = 6$ で、$\overset{\theta_1\text{ から }\theta_6}{\theta_1,\dots,\theta_6}$ は順に $0, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$ って感じか。これで P が正方形だったとすると $M = 4$ だ。同じように x 軸から始まるとすると $\overset{\psi_1\text{ から }\psi_4}{\psi_1,\dots,\psi_4}$ は $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$。この場合には $\varphi_1,\dots,\varphi_{10}$ は順に

$$0^\circ, 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ$$

になるのか。0° と 180° は重複してるから、実質的には 8 個の位置が出てくることになる。

「でな、$\varphi_1,\dots,\varphi_{N+M}$ の位置に頂点がある内接多角形を $\overset{\text{キューダッシュ}}{Q'}$ 、$\overset{\text{同じ場所}}{\varphi_1,\dots,\varphi_{N+M}}$ で辺が接してる外接多角形を $\overset{\text{ピーダッシュ}}{P'}$ って書くことにするか。そうするとこんな関係式」

$$\boxed{\ell(Q) \le \ell(Q') < \ell(P') \le \ell(P)}$$

「が成り立つはずだって思ってる。$\overset{\text{サヨちゃんが今言った式}}{(3.4)}$ は $\overset{\text{最後の不等式}}{\ell(P') \le \ell(P)}$ を出すのに使うのな」

「んー？　全然わかんないんだけど、円に内接する多角形と外接する多角形を考えるんだよね。だったら、こんなときはどうなるの？」

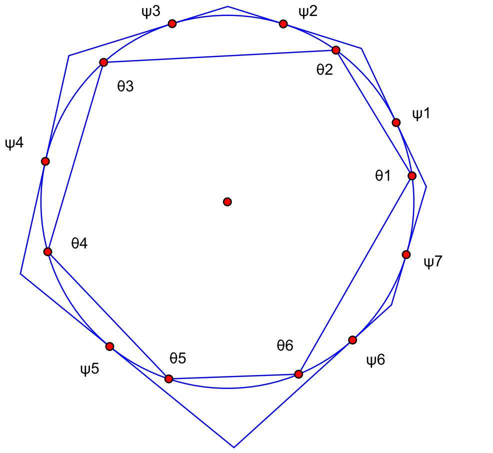
舞ちゃんは黒板の右端に空いているスペースまで歩み出て、白チョークを手に取った。

力みを感じさせない、しなやかな動きで黒板の上にチョークを滑らせる。円を、円に内接する多角形を、そして外接多角形を滑らかに描き出していく。

今日の舞ちゃんは普段の調子でずいぶんと積極的だ。前に数学部に来たときの借りてきた猫のような態度とは全然違う。

「内接多角形は 1, 2, ……6 角形か。外接は……7 角形だな」

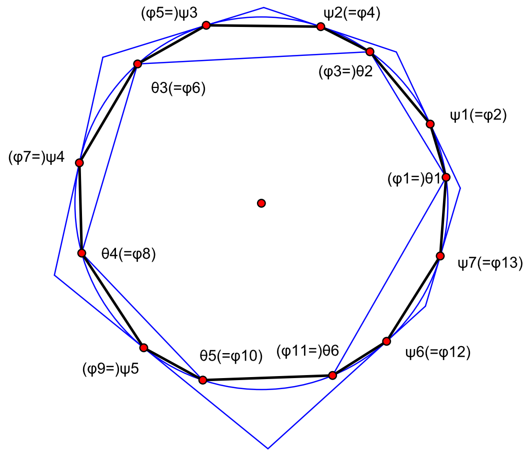
秋月くんは舞ちゃんの置いたチョークを手に取り、彼女の描いた円の中心から右方向へ半直線を引き、内接多角形の頂点に横軸のところから反時計回りの順に $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ と番号を振っていく。同じように反時計回りに外接多角形と円の接点の脇に、順番に $\psi_1, \dots, \psi_7$ と書き込んだ。



「円の内側の 6 角形が Q で外側の 7 角形が P だな。この右向きの線が角度の基点な。そっから順に内接多角形と円の共有点には θ_1 から θ_6 って名前を付けて、外接多角形と円の共有点には ψ_1 から ψ_7 って名前を付ける。正確には共有点じゃなくて、その偏角なわけだが」

そしてチョークを持ち替え、各半直線と円周の交点を結んで内接多角形を描いた。

「これが Q' な。この角のとこには通しで φ_1（ファイいち）から φ_13（ファイじゅうさん）って通し番号を付けとくか。この図の場合、$\varphi_1 = \theta_1$（φ1 が θ1）、$\varphi_2 = \psi_1$（φ2 が ψ1）って感じで、順にこんなふうになるな」



「Q（もとの内接多角形）だと θ_1（一番目の頂点）と θ_2（二番目の頂点）を真っ直ぐ結んでたところが、φ_2 のとこに寄り道する 2 本の線分に変わるだろ。だからその分長くなってる。他の場所も同じだな。だから $\ell(Q) \leq \ell(Q')$ だ（新しく作った内接多角形はもとのより周が長くなる）」

ほお、なるほどなあ。

「で、外接多角形の方は同じ偏角のところで接するように外接多角形を描くんだよ。だから……」

秋月くんは Q（内接多角形）の頂点のところから新しく円の接線を引いた。全ての頂点に対してそれを行った後、元々あった P（外接多角形）の辺と、新たに書き加えた直線とが作る多角形をなぞり直す。その結果、円の外接 13 角形が描き出された。

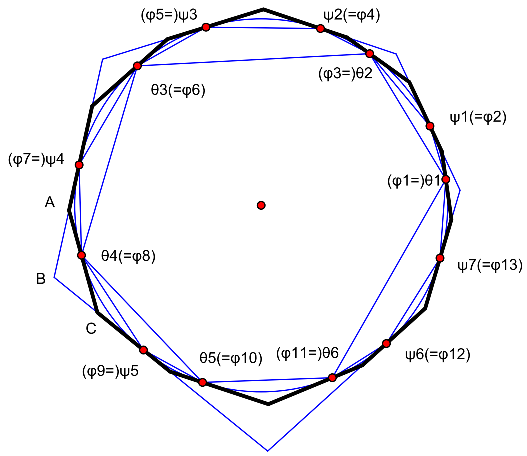
「これが P' だな

外接多角形の方は P'（細かくした方）では新しい頂点のとこから、次の頂点までまっすぐ次の頂点に向かってるのが、P（もとの多角形）じゃ古い頂点の方に寄り道してるよな。だから $\ell(P') \leq \ell(P)$（新しい方が短くなる）だ」

「えっと、ちょっと待って。新しい頂点って何？」

「あ、言葉悪かったか、すまん。φ_4 のところの接線と θ_4 のところの接線の交点みたいなとこだな。ここから次の頂点まで、$\overset{\text{細分した方}}{P'}$ では 1 辺で真っ直ぐ進んでるが、$\overset{\text{最初の外接多角形}}{P}$ だと一回外にいくだろ」

新旧の外接多角形の 3 つの脇にＡ，Ｂ，Ｃと書き込む秋月くん。



「ああ、なるほど。わかった。P だとＡＢとＢＣっていう 2 本の線分のところがＡＣっていう 1 本に変わるんだね。だから新しい多角形の方が短いんだ」

そうだ、と満足げにうなずく秋月くん。

「んー、なるほどー！」

舞ちゃんも大きくうなずいてる。

「確かにそうね、三角不等式ですぐにわかるのね。位置関係がちゃんと頭の中でイメージできてなかったわ」

「ええ、そういう見方ができれば$\overset{\text{あの式}}{(3.4)}$みたいな難しい計算はいらないんですよ。ま、ある意味この図があの式の証明みたいなものですが。

ちなみに$\overset{\text{この式}}{(3.4)}$に対応する内接の方の式は

$$\sin(\alpha+\beta) \le \sin\alpha + \sin\beta \qquad (0 \le \alpha, \beta \le \pi)$$

だな」

「次の不等式 $\overset{\text{エルキューダッシュがエルピーダッシュより小さいっての}}{\ell(Q') < \ell(P')}$ もオッケーなんだね。Q' と P' が相似だからって。秋月くんが言ってたのはそういうことかー！」

「いや、すまん。あれは間違ってた。この形だと $\overset{\text{補助で作った多角形同士}}{P' \text{ と } Q'}$ は相似じゃねえな。でも $\overset{\text{長さの大小}}{\ell(Q') < \ell(P')}$ の証明はできる。

例えば φ_1 と φ_2 の間の辺の長さを見てみるとき、$\overset{\text{真ん中の方向}}{\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}$ に補助線を引くと、$\overset{\text{内接多角形}}{Q'}$ の方は辺が補助線と直交するだろ。$\overset{\text{内接多角形}}{Q'}$ の辺は端点が単位円周上にあるから辺の長さは

$$\overset{\text{半分の角度のサインの2倍}}{2\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)}$$

になるわけだ」

残り少ない黒板の余白に辺の長さの式を書き込む秋月くん。

「$\overset{\text{外接}}{P'}$ の方はこの補助線が頂点を通る。だから単位円に接してる線分が 2 本出てきて、どっちも長さが半分の角度のタンジェントだからこうなる。

$$2\tan\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)$$

同じ角度だと sin と tan は tan の方が大きいしな。他の辺も全く同じだから……えーと、式を書く場所がないな。後ろ行くか」

まるで手を止めないといけないことがじれったいと言うようなうずうずした様子で教室の後ろに移動する。

$$\begin{aligned}\ell(Q') &= 2\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}\right)+\cdots+2\sin\left(\frac{\varphi_{13}-\varphi_{12}}{2}\right)+2\sin\left(\frac{(\varphi_1+360^\circ)-\varphi_{13}}{2}\right)\\ &< 2\tan\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)+2\tan\left(\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}\right)+\cdots+2\tan\left(\frac{\varphi_{13}-\varphi_{12}}{2}\right)+2\tan\left(\frac{(\varphi_1+360^\circ)-\varphi_{13}}{2}\right)\\ &= \ell(P')\end{aligned}$$

「って、こんな感じで $\overset{\text{内接多角形と外接多角形の大小}}{\ell(Q')<\ell(P')}$ がわかるわけだ」

「あ、この式見たことある！　正多角形の長さ計算するときに同じことやったよー」

隣り合う頂点の間の、原点から見たときの角の半分の角度の sin と tan。sin の方は確かに舞ちゃんの家で見た、内接正多角形の周長を計算するときに求めた 1 辺の長さそのものだ。

「全部できちゃったのか」

「なるほどなるほど！　これで証明完了だねっ」

3.5　２度目の部活見学　5

パチパチパチパチパチ。

突然の音に振り向くと、和奏先生が立ち上がって拍手をしていた。

「長さの定義まで立ち返って、円周の内接多角形と外接多角形の長さの関係を整理して。しかも円の面積の厳密な計算もできてる。ちゃんとまとめたら結構すごいと思うよ。どこかに発表しても全然恥ずかしくないレベルじゃないかな」

「そんなにすごいことですか？　俺としてはただ気になったことを順番に整理してっただけって感じですが。俺だけじゃなくって、みんなそうだと思いますし」

「ううん。そういうことじゃないの。どんなことでも 1 つ 1 つのステップはそういうものだよ。全体としてストーリーがまとまってることが大事なんだ。今回の話だと、円周率というキーワードについての、導入段階における基本的なことを整理するって筋書きだね」

納得がいくようないかないような、変な顔の秋月くん。

「発表はともかく、とりあえず活動記録にまとめましょうよ。……今度は誰にお願いしようかしら？」

全員の顔を見回す先輩。

妙な表情になったのは秋月くんだけで別に変な雰囲気になったというほどでもないが、先輩の言葉で場の空気がリセットされた。

この一連のやりとりの間、僕と舞ちゃんは事態をうまく飲み込めていなくてただ呆然としていただけなので、先輩の視線に応えられるわけもなく。

秋月くんがこちらをちらりとうかがってから遠慮がちに口を開いた。

「じゃあ俺、まとめます」

秋月くんは邪道数学部活動記録を手に、テーブルに向かう。

外を見るといつの間にか空が暗くなり始めていた。下校時刻がかなり迫っている。

僕は前後の黒板を改めてながめながら、各場面でのみんなの言葉、自分が考えていたことを思い返してみた。

定義の奥深さ、曲がった曲線の情報が一見消えてしまうという不思議。だがそこを経由して、外接多角形の長さが円周より長いという“それらしい”結論を導けるという、さらなる不思議。

なんて言えばいいんだろう……ふわふわと、熱で浮かされたような感覚と言うのか。実際に頭の全体が熱を持ったような感覚があり、それがすごく心地良い。

ユキはずっとこんな世界で生きていたのだろうか。僕が感じたのはあいつがいつも見ているものの、ほんの一端なのかもしれない。でも、僕にもそこに触れることができた、そう伝えたらユキは喜んでくれるだろうか。

「あー、たっくん。ゆきちゃんに教えてあげたら喜ぶかな、とか考えてるでしょ」

思考に沈んでいた意識が、舞ちゃんの声で現実に引き戻される。

こういう思考って顔に出るものなのか？　それとも付き合いが長いとこんなことまで伝わってしまうのなんだろうか。

「ゆきちゃんというのはどなた？」

自分のノートにいろいろ書き込んで、活動記録をまとめるための構成を練っている秋月くんを脇に、二人の女の子が会話を始める。

「本庄くんの妹です。雪菜ちゃんって言うんですけどね。すんごい頭よくって、中でも数学はほんとうによくできるんですよー。うちの兄が学校の教科書貸したときに、１日で中高６年分を読破しちゃったんですよ」

確かに昔、そんなことがあった。あいつはまだ小学生で数学に対する才能を周囲が認識し始めた頃のことだ。不登校のユキを心配してくれての配慮だったのだと思う。今はもう社会人の、当時大学生だった舞ちゃんのお兄さんが、自分が使っていた中学・高校の数学の教科書を譲ってくれると言ってくれた。そしてあいつは、舞ちゃんの言うとおり１日足らずで６年分を読破してしまったのだ。

ちなみに教科書６年分の感想は

［漢字が難しかったの］

だった。確かに国語辞典・漢和辞典を重そうに繰っていたような気がする。本を読む習慣も根付くか根付かないかくらいの時期で、ネットもそれほど使っていなかったから文章を読む経験が絶対的に不足していたのだろう。

「そうなんだ、それは確かにすごいわね」

「１日で！　さすがにそりゃすげーな。会ってみたいなその子とも」

秋月くんも手を止め、会話に入ってくる。

「本当ね。もし良かったら今度連れてきてくれたらうれしいわ。本庄くんが入部するって決まる前からこんなことを言うのも変かもしれないけれど」

……もしユキが秋月くんや先輩と顔を合わせたら、あいつはどんな反応をするのだろう。

この２週間何度か想像してみたことではあるが、実際にどうなるのかは正直よくわからない。うまく馴染めるのか馴染めないのか。あいつが秋月くんの話に興味を持っていたということだけでは、希望的観測に自信を持つにはあまりにも心許なかった。

ユキの向学心の高さ、主婦として一人前に働く姿を否定するわけじゃない。むしろただ決められたレールに乗って高校に進学した僕なんかより、よっぽど立派な人間だと思っている。

でもその一方で、あいつが人並みに同年代との交友関係を持てていないことに対して、漠然とした不安を僕が感じてしまっているのも事実だった。友人を作ってやりたいというのはある意味で自分本位なだということは理解している。だがユキがこの数学部で活躍する姿を見てみたいという気持ちが、僕の中にあるのもまた否定できなかった。

あいつの人生なんだ、僕がそこまで干渉していいわけじゃない。でも、相手も興味持っていたと伝えれば、いつか交流が生まれるかもしれない。
ユキが興味を持ったときにいつでもその機会が作れるように、そのために……。
うん。僕も、数学部に入ろう。
「雪菜は人見知りが、ほんとに激しいやつなんです。だから無理に連れてくることはできないと思います。でも数学部のこと、話してみます。今日はこんなことをやった、って話し続けてみます」
宮原先輩、秋月くん、和奏先生を順に正面から見つめる。
「なので、僕を数学部に入れて下さい。これからよろしくお願いします」
先輩たちに頭を下げた。
「顔を上げて。うれしいわ、本庄くんが来てくれて。こちらこそ、これからもよろしくね」
「わ、私も入部します！　入部させて下さい。数学部に」
よろしくお願いします、と舞ちゃんがみんなに順番に、せわしなく頭を下げていた。
「こちらこそよろしくね。そうだわ、２人は今度の土曜日の都合はどうかしら？　湖畔公園で新入生歓迎会をやろうと思ってるの。学外部員の方たちも一緒にね」
僕たちは顔を見合わせ、しっかりと頷いた。
「「大丈夫です」」
こうして僕たちの部活動を含めた高校生活が本格的に始まった。

ちなみに残り少ない時間でノートをまとめることは当然できず、活動記録に書く内容を家でまとめてくることは秋月くんの宿題になった。

序章　定義（はじまり）がクライマックス　完

＊　雪菜の日記より

今日兄さんから部活で、曲線の長さの妥当性の決定的証拠は原理的に見つからないという話があったと聞いた。でもそれは多分正しくない。いや、この問題に限れば証拠は本当にないってこともあり得るけど、この形の問題全般という意味なら“ 妥当性が証明できる ”場合もあると思う。

つまりこんな感じだ。

その概念が持っていて欲しい性質をいくつか挙げる。そしてまず、具体的にその性質があるものを一つ構成する。そしてさらに、その性質があるものが一意に定まることを証明する。

要するに公理的な特徴付けだ。こういう枠組みは妥当性を担保する数学的な結果そのものなんじゃないかな。

今の場合でいえば曲線の長さ、として要求されるべき性質として例えば次のようなものがあるだろう。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の曲線の長さとは

(0) 写像 $l : C([0,1];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ である。

(1) c が線分、つまり $c(t) = (1-t)c(0) + tc(1)$ をみたすとき、$l(c) = |c(1) - c(0)|$.

(2) c_1 と c_2 が互いに速度を変換して得られる曲線の場合、つまり $c_1(t) = c_2(f(t))$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ となる単調増加連続関数 $f : [0,1] \to [0,1]$ が存在する場合 $l(c_1) = l(c_2)$.

(3) $c(0) = a, c(1) = b$ で c が a と b を結ぶ線分の速度変換で得られないときは $l(c) > |b - a|$.

(4) c_3 が c_1 と c_2 をつないだ曲線の時、つまり $c_1(1) = c_2(0)$ で、かつ

$$c_3(t) = \begin{cases} c_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ c_2(2(t-(1/2))) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

のとき $l(c_3) = l(c_1) + l(c_2)$.

(5) c_2 が c_1 の向きを反転させたとき、つまり $c_2(t) = c_1(1-t)$ のとき $l(c_1) = l(c_2)$.

(6) c_2 と c_1 が等長変換で写り合うとき、つまり $c_2(t) = Ac_1(t) + a$ となる $A \in O(n)$(直交行列) と $a \in \mathbb{R}^n$ があるとき、$l(c_2) = l(c_1)$.

l が曲線の長さと呼ぶにふさわしいものなら、上の条件はみたされていないといけない。部活で話題に出たという、中間点を結ぶ線分の長さの和の上限というのも、実際この条件をみたしている。

逆にこの条件をみたす関数が一つしかないことが証明できれば、「中間点を結ぶ線分の長さの和の上限」が長さの唯一の妥当な定義であるという保証といって良いだろう。

この一意性は、完全に数学の言葉に落とし込まれているので証明したり反例を挙げたりすることができるわけだ。

でも、ここに挙げた条件では一意性を示すには絶対足りないな。なんせ長さの上限を与える公理が一つもないんだから。曲がってる部分を一斉に 2 倍してもこの条件はみたしたままだ。

何だろう？　それこそ内側を進むグネグネしてない曲線は必ず短い、みたいな条件を課すのか？　でもそもそも、その条件を線分の長さの和の上限がみたすのかも判らない。もしその条件をみたして、しかもその条件で一意に定まるとしたら、それで解決だろうか？

グネグネしてない、は凸性とかで定義するんだろうか。曲線そのものと、端点を結んだ線分とで閉曲線を作って、それが単純であり、かつ内部と凸包が一致するという条件。

“内側を進む”は内部の包含関係で定義すればいいだろう。内側の方が短い。大きく回ると遠回りになるというのは日常の感覚ではあるが、それはどんな連続写像に対しても成り立つはずだ、と思うべき“公理”なのだろうか。

そしてそれとは別に、中間点を結ぶ線分の長さの和の上限がそれをみたすこと、それを仮定すると一意に定まることは、真なのだろうか。正しい気もするが、反例があるような気もする。

公開	初版	2017 年 3 月 12 日　公開
	第 2 版	2017 年 8 月 28 日　公開
著者	河下希	
公開場所	邪道数学研究所	
	http://cubicsphere.web.fc2.com/index.html	