目 次

第1章　この路の行く先は

1.1　足元をしっかりと〜集合は数学の基礎〜

1.1.1　花の散る初活動〜新入生歓迎会・前編〜

数学部に入ることを決めたその週末、今日は新入生歓迎会を兼ねた部活の花見が行われるその当日である。集合場所の犬里駅へ向かうため僕は舞ちゃんと家の前で待ち合わせていた。

僕が家を出るのとほぼ同時に斜向かいの家から舞ちゃんも出てきて、大きく手を振りながら駆け寄ってくる。

「おはよう、舞ちゃん」

「おはよー！　湖畔公園に行くのは久し振りだね。晴れて良かったよ」

んー、と空を仰ぐように伸びをする舞ちゃん。ほとんど雲もない、風も穏やかな気持ち良い日だった。適当に雑談をしつつ集合場所である犬里駅へ、普段の通学と同じ経路で移動する。

「新しく買ったボードゲームが昨日届いたんだー」

「へえ、どんなゲーム？」

楠乃家には一つの部屋が埋まってしまうくらいにたくさんのゲームがある。カードゲームやボードゲームのようなアナログなものも、種々の媒体のデジタルなゲームも。1人でじっくり取り組むものからみんなでわいわい楽しむものまで、多種多様な媒体とジャンルのものが揃っている。両親共にゲーム好きでそれが出会いのきっかけだったらしい。

楠野家の子どもたちもいろんなゲームを知ってるし、だいたい何をやらせても強い。およそどんなゲームでも僕は舞ちゃんには敵わない。

「まだちゃんと説明書読んでないんだけど、ウィルスと戦いながらワクチンを作っていくみたい。プレーヤー全員が協力して戦うんだって！　ウィルスが蔓延する前にワクチンを全部作ったらプレーヤー全員の勝ち、ってなるみたいだよ」

協力型か。ボードゲームとしては珍しい。

魔女の館から脱出するゲームとか、外から攻めてくる狼人から村を守るゲームとか、いくつかやったことはあるけれど。

舞ちゃんがルールを説明してくれたが、いまいちイメージがつかめなかった。こういうのは大抵、やってみないとわからないものである。

「へえ、じゃあ明日……とは言わないけど、近いうちにやってみようか」

「うん！」

猫川駅で乗った電車には宮原先輩も乗っていた。集合時刻に間に合う最も遅い電車に乗ったのだから当然の流れか。

それよりも驚いたのは先輩がとても大きな荷物を持っていたことである。ビニールシートなどの場所を整えるものとお弁当らしい。ほとんど手ぶらなので僕たちも何か持ちますよ、と言ったら、

「新入生歓迎会なのよ。主賓に仕事はお願いできないわ」

次の機会には期待してるわね、と丁寧に、だがきっぱりと断られた。

陸橋をうんしょこ渡る姿を見ていると、何も手伝わないことでかえって気を遣ってしまった気がしないでもないのだが、まあ、先輩がそういうスタンスなら僕たちはできるだけ何食わぬ顔でしたがうのが仕事だろう。

犬里駅には既に秋月くんがいた。隣にはやわらかな表情を浮かべた女の人がいて、２人で何やら真面目な雰囲気で話している。

「お、来た来た。サヨちゃん、今日はよろしくお願いします」

こちらに気付き、秋月くんが軽く手を挙げてはつらつと挨拶する。

「こんにちは。サヨちゃん。……こちらが新入生の方たち？」

女性が宮原先輩に問いかける。

「ええ、本庄建也くんに楠乃舞花ちゃんです。……こちらは淡中さん。普段でもときどき部活に来られる方よ」

「淡中志緒理（たんなかしおり）です。よろしくお願いしますね」

僕たちと順に目線を交わしてにこりと微笑む。

校外部員のほとんどは会場である湖畔公園に直接来るらしく、この場で集まる人はこれで全員らしい。

自己紹介や雑談をしながら、僕たちは会場まで徒歩で移動を開始した。前を宮原先輩と秋月くん、その後ろを淡中さん、舞ちゃん、僕が並んだフォーメーションである。

淡中さんは街の方にある大学の、数学科の４年生なのだそうだ。昨年度から定期的に犬里の数学部に参加しているらしい。春の陽だまりのようなほがらかな笑顔が印象的な、落ち着いた雰囲気の女性だった。

始めは僕たちの犬里での入学してからこれまでのことを話したり、淡中さんの大学での普段のできごとなどについて聞いたりしていたが、次第に数学の話題へと移っていった。

まあ、数学部ですからね。そういうことが好きな人が集まって、雑談でもそういう方向に流れていくのは自然な姿なのだろう。

「大学での数学はやっぱり難しいですか？」

舞ちゃんの質問に淡中さんは丁寧に答える。

「難しいか難しくないかで言えば難しいことが多いと思います。どういうレベルの人にとっても。わかればわかっただけ、次々と課題は出てきますからね。でもよく言われるように、数学は基本的には積み上げの学問ですから、やれば着実に進んでいくのも確かですよ。論文や本に書いてあるような、すでに誰かがやったことに関しては、ですけどね」

他の人が見つけた知識を本や授業から吸収する『勉強』はどんなに難しく感じてもいつかは理解できる保証があるが、誰も見つけたことがない現象を探求する『研究』ではそうはいかない。それ以前に研究に必要な知識がいつになったら身に付けられるのか、今の私には全く見えないですが。と、淡中さんは言う。

「授業は前に勉強したことが理解できていなければ次に学ぶことは理解できないことが多いですね。そういうふうにカリキュラムが組まれているのだと思います。下の学年で学ぶことがわかっていないと行き詰まるのは中学や高校よりも顕著な気がします。

でも、授業は受動的に知識を仕入れるお手軽な手段の一つ、私の中ではそんなイメージでしょうか。学校で教えてくれることも大事ですが、自分で考えたり本を探したりして勉強するのがメインという感じですね」

そうやって知識を仕入れて、視野が広がっていくのが楽しいのだという。

「全然違うんですねー。私なんて何も考えずにただ授業を受けてるだけです」

舞ちゃんがしきりに感心するように相づちを打っていた。

「専門性の度合いが違うというのもあるとは思いますけどね。大学に行けば数学しかしなくなる分、深く考える時間もとれますし、またとらないといけないんですよね。その分は授業を超えて自分で取り組まなければいけません。

それに、学校の授業では扱われずに終わってしまうことも多いですよ。授業時間は限られてますし、細かいことにこだわりすぎると高度な事柄にいつまで経ってもたどり着けませんから、仕方ないのですけどね。

ある程度はそういう部分も自分で調べていかないと、やっぱりきちんとした理解は得られないと個人的には思います」

「えええー!?　大変だ。そっかーほんとに自分で勉強しないといけないんですね」

「みんながみんなそう考えているわけではないと思いますけどね。授業の先を自習することに力を入れている人もいますし、別の分野の知識を得ることに重点を置いている人もいますし」

「先に進んでしまって授業では教わらずに終わってしまう話題って、例えばどんなことがありますか？」

僕に理解できるとは正直全く思えなかったが、ふと興味が湧いたのでそんな質問をしてみた。

「そうですね、いろいろありすぎてどれを言うのが良いか迷いますが……そうだ、私が何年か前から疑問に思ってることの一つに、負の体積って何だろうというのがあるのです。この前同期の友人にその話をしたら、お昼前に始めた話が夜遅くまで続いてしまいました」

フノタイセキ？　0 より小さいって意味のあの『負の数』の『負』か？　体積が -1 とか -3.7 とか……なんじゃそりゃ。

「体積と聞くと、まずは物の体積を想像すると思います。それだと正か、せいぜい 0 の体積しかないですよね」

「僕には体積が 0 というのも想像しづらいですが……」

「そうですか？　……そうかもしれませんね。

体積が 0 というのは、紙のようにとても薄いものを、さらに薄くしていった先に行き着くような仮想的なもの、というイメージでしょうか。正の厚みが、」

指をそろえて胸の前に両手を出し、向かい合わせにする淡中さん。そこから左手を動かさないまま右手スライドさせていって左手に重ねる。

「これが厚さが 0 になった状態ですね」

「はあ……」

「そしてそこを通り過ぎた先が、」

左手を越えてさらに右手をスライドさせていく。

「体積が負の『物体』。そんな感じです」

淡中さんの両手の甲が向かい合っている空間を眺める。

「『厚みが正である方向』を決めて、反対方向の厚みがあるものは体積が負であると“いう”わけです。それは『鏡に映るもの』ということもできるかもしれません。いい方はともかく、そういうものがもとの世界のものとは符号を逆にした体積を持つ、そういうイメージを定式化した『行列式』という概念があるんです。

回転しても変わらない、でも鏡に映すと -1 倍されるというのは体積として自然なのか、と疑問に思いましてね。負の体積をとらないように行列式の代わりのものをうまく定義できないか、とずっと考えているのですが」

0 のその先……鏡に映ったものは体積の符号が変わる？　変なことを考えるんだなぁと思いながら聞いていたら、

「この道を渡ったら公園よ。やっぱり湖の近くは水の匂いが強いわね」

宮原先輩のアルトボイスに僕たちは会話を中断して辺りに意識を向ける。話し込んでいるうちにいつの間にやら僕たちは湖周道路まで来ていたらしい。

1.1.2　花の散る初活動～新入生歓迎会・後編～

先輩の言うとおり水の匂いがした。風が涼やかな湿気を帯びている。

道路を渡ればそこが目的地の湖畔公園である。右にも左にも、見える限り桜並木が続いている。今日は散り始めらしい。ふんわりとボリュームのある花房が枝々を彩っていると同時に花びらがそよ風に舞っていて、別世界に迷い込んだような幻想的な眺めだった。

花見の会場である湖畔公園はその名の通り、湖の岸沿いに続く公園である。公園と言っても遊具が置かれた広場という意味ではなく、全長３ｋｍにもおよぶ敷地に様々な施設の集まった場所である。

他の団体に取られていない場所を探して、三方を八重桜に囲まれた湖に面している芝生の広場をうろうろしていると３人の男性グループがこちらに近づいてきた。それに気付いた宮原先輩は４５度のきれいな礼をする。校外部員の方々らしい。

彼らと一緒にさらにしばらくうろうろして、開(ひら)けた場所を見つけてビニールシートを広げた。さすがにシートを広げるのは人数がいた方がやりやすいということで、僕たちも手伝わせてもらった。

風で飛ばないようにシートの四隅に重しを置き、真ん中に料理を並べていく先輩たち。

おにぎりや唐揚げ、春巻き、ラップサンドに、キッシュ、卵焼きなどのオードブルとして定番のメニューに、伊勢エビ、ローストビーフ、黒豆などのおせちにありそうな品々。おはぎにスイートポテト、フルーツタルトなど、デザートの種類も豊富だ。それらが色彩のバランスを考えて上品に盛りつけられている。一方で飲み物は特に凝ったものではなく、普通にスーパーで売っているペットボトル飲料だった。

僕たちが簡単な自己紹介をしていると和奏先生が一人の男性を伴ってやってきた。休日モードなのだろうか、いつもスーツ姿の和奏先生が今日は私服だ。……こうなると本当に僕たちと同年代にしか見えなかった。

「宮原さん、準備おつかれさま。この人は大学時代の同級生の坂井くんだよ」

「初めまして坂井と申します。石崎とは大学で仲が良かった友人同士でして、今でもこうして交流を持たせてもらってます。たそがれ出版で数理くらぶの編集部に勤めてまして、石崎からこちらの数学部の話を聞いて、ぜひ見学させてもらいたいとお願いして連れてきてもらいました」

「まあ。いろんな人に来ていただけるのはうれしいです。ぜひ楽しんでいってください。そして坂井さんからもいろんなお話を聞かせていただければうれしいです」

宮原先輩が坂井さんとあいさつしている間にも続々と人が増えて、持ち寄りの料理がどんどん増えていく。

僕たち新入生はそれぞれに可能な限りで自己紹介をしていた。

ちなみに……

「きみ、新入生？　僕は浅井と言います、初めまして」

「あ、いえ。今年度から顧問になりました、石崎和奏と申します」

「え？　先生？　あちゃー大変失礼しました！　てっきり新しく入った１年生だとばかり」

「やっぱそう見えますよね。俺が初めて見たときはスーツ姿でしたけど、コスプレした同級生かと思いましたよ」

「えええ～？　秋月くんそんなふうに思ってたんだ。ちょっとショックかも」

「いやいや褒め言葉ですって。親しみが持てますからね。和奏先生は人気もありますし。親身になってくれるお姉さんって感じで」

和奏先生は新入生と何度も間違われていて、顧問であるとの訂正を含めた自己紹介で僕たち以上に忙しそうだった。

「さて。揃ってはいないですが時間ですし、そろそろ始めましょうか。途中から来られる方も多いですが、必要であればタイミングを見て改めて、ということにいたしましょう。みなさん、飲み物の御用意をお願いします」

先輩のよく通る声で、シート上で談笑していた人たちはそれぞれにコップを用意して飲み物を注ぎ始めた。

飲み物が行き渡ったのを確認し、先輩は改めて話し始める。

「みなさん既に、ずいぶん積極的に交流されてたようですので、ご存じの方も多いかとは思いますが改めて紹介させて下さい。万樹くん、建也くん、舞花ちゃん、前に来てくれる？　……今年は３人も新しい子が

入ってくれました。左から順に秋月万樹くん、本庄建也くん、楠乃舞花ちゃんです」
　花が開くような笑顔で僕たちの紹介をする宮原先輩。
　会場からゆっくりと拍手の波が広がった。鳴り止むのを待って、先輩は続ける。
「入部してくれてありがとう。これからもよろしくね。そして新しい顧問の石崎和奏先生」
　宮原先輩にうながされて立ち上がる和奏先生。
「ご指導よろしくお願いいたします。……では、乾杯！」
「「かんぱーい」」
　各自好きな料理を取り、歓談する。
　年配の人が多いが中には大学生くらいの人もいた。どれくらいの人が実際に数学部の活動に参加しているのかはわからないが、学外部員は実に多彩であることが想像された。
　四角いビニールシートの上では、料理に舌鼓を打ちながら様々な話題が飛び交っていた。
「ところで、坂井さんはどのようなことをご専門にされていたのでしょうか？」
　宮原先輩が坂井さんに尋ねる。
「大学では微分トポロジーという分野を勉強してましたね」
「あ、俺もその辺に興味あるんですよ」
　料理を取るためにたまたま近くにいた秋月くんが、坂井さんの専門分野らしきキーワードに食いつく。
「おもしろいことは何でもやりたいって思ってますけど、微分幾何的なことが自分は好みなのかなって思ってます」
　そこから秋月くんと坂井さんは、僕にはよく分からない難しい話で盛り上る。キョクリツの評価がどうとか、ガイフクソコウゾウがあるとなんだとか、ヘイビブンケイシキの取り方でこうとか。ずっと横で聞いていたが、よくわからない単語ばかりでちんぷんかんぷんだった。
「秋月くん、きみ高校１年生でなかなかすごいね」
　数学の話に入っている間はただ真剣に会話に入り込んでいた感じだった坂井さんだが、話に一区切りがついたところで秋月くんを褒めた。目の色が心持ちやわらかくなる。
「今年の新入生はみんなすごいんですよ」
　坂井さんの言葉に宮原先輩が喜々として４月の部活動の様子を坂井さんに話し始める。
　いや、すごいのは秋月くんだけだと思いますよ？　僕は特別な知識なんて何にも持ってないし、舞ちゃんも頭の回転が速いところはあるけど、まあ普通の範疇だろう。そう思ったが先輩の話を聞いた坂井さんは、お世辞も込みだろうとは思うが、
「へえー！　それは確かにすごいですね。……実は石崎とも話してたんですけど、夏休みにこんな合宿形式のコンペがあるんですよ」
　などとうれしそうに言って鞄から１枚のチラシを取り出した。僕や宮原先輩、秋月くんだけでなく、たまたま近くを通りかかった舞ちゃんも先輩の肩越しにチラシをのぞき込む。
「数学や周辺の学問領域に熱意のある若者を集めて、互いに刺激を与えられるような場を作りたいってのが一番の目的ですね。具体的な内容はそれぞれが考えたことを論文としてまとめて、その内容について会場でプレゼンしてもらう感じですね。提出した課題の予備審査を通過した人たちが会場に招待されるってことになってます」
　提出課題は『数理科学に関連する自分たちで考えたことをまとめたもの』、締め切りは６月末日。
　１３歳から１９歳までの人だけで構成される集団（個人でも可）なら誰でも応募できるらしい。
　それを聞いた瞬間、視線を感じた。舞ちゃんと目が合って、僕は苦笑する。
　うん、確かに考えたよ。だってユキは今年中２だし。対象に入ってるじゃないか。
「ここに書いてある通り、日程は４泊５日ですね。例年高校生くらいの年代の参加者が中心で、講義も少しありますが参加者による発表がメインです。一般にはあまり知られていないイベントですが、その筋のメ

ディアからは記者も来るんですよ。大学などからも研究者が直(じか)に現地入りしたりもしますし、目に留まれば卒業を待って推薦で進学して、実質的にはすぐ研究室に入るなんてこともあるみたいですね」

高校を出てすぐに研究を始めるのか。なんだかスクリーン越しに見る遠い世界のできごとのような印象を受けた。だが、

「へえ！　じゃあ同年代の仲間と話せる機会があるんですね。それにプロの数学者とも。おもしろそうだな」

というのが秋月くんの反応。興味津々という感じだ。彼のレベルは僕には正確にはわからないが、自分とは無関係、では終わらないのかもしれない。

だがメディアに取り上げられるとか、研究者としてのスカウトなどに言葉は一顧だにせず、ただ人と交わる機会というその一点に目を輝かせるその姿。能力以外の部分でも自分との違いみたいなものを感じた。

「みんなにやる気があるなら、私はぜひ数学部として応募してみたいわ」

完全に他人事として話を聞いていた僕は宮原先輩の興奮気味の言葉に思わずぎょっとしてしまった。秋月くんや先輩が個人的に参加するのではなかったのか。

「私なんかで大丈夫なんでしょうか……」

呆気にとられていた僕より先に舞ちゃんが反応する。

「さあなあ。でもせっかくの機会だし、やれるだけやってみれば良いんじゃね？」

「……そうだね。当たって砕けろ！だね」

目の前なのにどこか遠いところで話が勝手に進んでいく。

ただ、いつまでも呆(ほう)けていられる時間が続くわけもなく。

「建也くんはどうかしら？」

と、先輩が僕を見つめてくる。

正直なところ心の準備なんて全くできていなかった。でも……一期一会を大切に。そう言うとあまりにもきれいすぎるかもしれないが、流れに身を任せるのもそんなに悪くないような気がした。

それに成り行きでこの場にいるような僕だけど、やるからには部活動の全てをきちんとやりたい。それくらいの覚悟は持って入部したつもりだ。

「どれだけできるかわかりませんが、できる限りがんばります」

行けるところまで、行ってみよう。

春の風が通り抜け、桜の花びらが僕たちの周りを微かに彩った。

1.1.3　本の森の中へ〜数学書の探し方 in 図書館・前編〜

ゴールデンウィーク。新しい学校に、新しい友人に、新しい部活動に。慣れないこと続きの怒濤の 1 ヶ月が過ぎ去り、新生活もようやく落ち着いてきた頃である。

経緯や理由はどうあれ入ることになった数学部。

疑いを挟む余地もなく僕はメンバーの中で最低レベルである。しかも入部早々コンペに向けた課題付き。

秋月くんや宮原先輩に追いつくのは無理かもしれないが、少しでも足を引っ張らないようにするにはどうすれば良いのだろう。

ユキに相談してみたら、あいつは目を輝かせながら次のような答えをくれた。

［無理のない、努力がきちんと実を結ぶやり方をしないとね。

まずは基礎をきちんと身につけることじゃないかな。途中の点を順に線分で結んだもの、その長さの上限を曲線の長さと呼ぶことにするのなら、長さを比べるときにはまっすぐな線をつないだもの同士で比べることになるのは必然なんだよね。にも関わらず、なんか違和感あるなあって感じちゃうんだとすれば、論理の仕組みがちゃんと理解できていないというか、実感できてないってことなんだと思うの。

数学の言葉は論理、そして集合と写像なのね。現代では全てを集合と論理の言葉で表現し直すことになってるみたい。そこをきちんと押さえておけば、いろんな話をもっと深く理解できるようになると思うの。

面積だって角度だって、心の中にあるイメージは論理とは無関係だと思うけどね。でも、イメージをきちんと人に伝えるために、論理と集合の言葉に翻訳するのが数学の流儀なの。翻訳の過程そのものを感覚的につかめること、それができれば長さを比べるのにカクカクした線しか出てこないのは当たり前に思えるはずなの。

論理と集合の基礎を押さえる以外だと、数学の楽しさをきちんと知ろうとすることが大事かな。不思議というか、驚きのある話題なんかが良いと思うの。４月に兄さんたちがやった、円周の長さと円の面積がどっちも円周率っていう同じ数と関係してる、みたいなのも良い題材だと思うな。証明はできるけど、どういうからくりなのかやっぱりよくわからないなあ、不思議だなあ、って思える話題は個人的にはおもしろいと思うの。今すぐどうなるってことじゃないと思うけど、そういう感性を磨くチャンスを見逃さない気持ちは、できるだけ早く身につけたいもの、かな。

あと、数学そのものじゃないけど、本の読み方とか探し方とかかなあ。本のことは少しは教えられると思うの。と言っても、図書館にあるものの探し方くらいだけどね］

最初にやるべきことをあいつなりに整理したのが次の３つ。

- 数学の言葉である論理と集合についての知識を得ること。
- 数学のおもしろさを知る（ための機会に気づけるようになる）こと。
- 文献の探し方と読み方を覚えること。

おもしろい話題。一般向けの本で手軽に取り上げられているのだと素数とか円周率とか。実際その辺りには不思議な現象はたくさんあるらしいが、他の分野でもいくらでもあるとユキは言う。

今の僕にはまだまだよくわからない世界だと、ユキや秋月くんたちを見ていると痛感する。

具体的にすべきことがあるというわけではないが、地道に勉強する中で出会ったものに大切に接していく姿勢を保ち続ける、その姿勢を早い段階から意識するようにした方が良いというのがあいつの意見のようだ。

一方で基礎となる論理と集合。それは比較的内容がはっきりしていて、しかも何をするにも理解の質を高めてくれる。少なくともユキの考えではそういうものらしい。

何をするにも活きてくる基本的な感覚と知識。その習得から始めるのが良いだろうというユキのアドバイスを実行に移すため、連休中に集合論の本を読んでみることにした。

そのための本を見つけるため、本の探し方と選び方についてのレクチャーも兼ねて、僕は今日、ユキと一緒に県立図書館へ出かけることになった。考えてみると犬高に通い始めて以来、２人で出かけるのは初めてだ。約１ヶ月ぶりのことに少しばかり心が弾む。

駅とは反対方向行きのバスに乗り、２人がけの席に肩を寄せ合って座る。そうしてバスに揺られること約４０分。この１ヶ月の学校でのできごとなんかを適当にささやきあっているとあっという間に最寄り停留所『文化公園入り口』に到着した。

県立図書館はその名から想像できる通り、県に一か所しかない施設である。そのことを考えると１時間に満たない移動時間はそれほど長くはないのだが、ここまで来るバスは約２時間に１本しかないらしく、ちょっとだけ不便である。

伸びをしながら辺りを見回した。

「この辺は変わらないね」

前方には松の小径が続いている。近代的で巨大な建造物は見あたらない、緑豊かな郊外の土地。小学校の時に来て以来だから、僕にとっては５年振りくらいか。

文化公園は街から続く長い上り坂の頂上にあり、後ろを振り返ると雄大な湖を含めた大パノラマが目に飛び込んでくる。右方向へ視野の続く限り広がる湖に、湖を取り囲む山脈。そんな雄大な自然を背景として犬里や猫川、兎山など、近隣の街が一望できるのだ。

「そうかも。私は毎週のように来てるからよくわかんないけど、でも新しく何かができたってこともなかった気がするね」

僕が周囲の景色を満足いくまで堪能したタイミングでユキは手を差し出してくる。その手を取って僕たちは敷地内へ入っていった。

文化公園というのは今日の目的地である県立図書館を含め、いろんなものが寄り集まった総合施設である。絵画や彫刻などを収集、管理している美術館、製作体験ができるガラス工芸工房、県内外の遺跡から出土した文化財を研究している歴史博物館、野外ライブや縁日なんかで使われる多目的広場、などなどから構成されている。湖畔公園と同じく文化公園も県内外に誇れる立派な施設だと思うのだが、何と説明したら良いのかわからないのが珠に瑕である。

微かに響く葉擦れの音や鳥のさえずりを聞きながら、日本庭園風の敷地を進んでいく。のんびりと鯉が泳いでいる様子がなんとも長閑である。木々をささめかす微かな風にユキの髪がふわりとなびいて、時折り僕の腕を軽くなでてくる。名前は知らないが何かの花の甘い匂いがどこからともなく漂ってくる、春の日差しが暖かな日だった。

さらに左右を竹林に挟まれた石畳の小径を抜けると図書館の正面玄関にたどり着く。

思わず足を止め、建物を見上げた。ユキもつられて立ち止まる。

どこか遠い国の古いお城をイメージさせるような、不思議な質感の建造物。ああ、変わらないな。懐かしさに思わずため息が漏れた。

「ごめん、立ち止まって。さあ、入ろうか」

石造りのエントランスを通り、僕たちは一緒に２階建ての図書館に入っていく。

建物に入るとまず、脇にある小さな扉をくぐった。そこにはロッカールームがあり、大きな荷物はここに置いてから入館することになる。館内での本やノートの持ち運びはこの部屋に置かれている館内専用の籠を使うことになるのだ。

荷物をロッカーに入れて小部屋を抜けると、広々とした吹き抜けのエントランスホールに出る。壁や天井に反響して人の気配が伝わってくる不思議な空間だ。清澄な空気に満ちていて、建物の外周部からは距離があるのに何故か柔らかな光に包まれている。

僕たちの目的地は２階にあるメインの開架書庫である。児童書、雑誌、洋書を除く書籍が陳列されている、フロアの大半の面積を占める大部屋だ。

吹き抜けの階段を上り、書庫に入った。エントランスとの間にある扉をくぐると、少しほこりをまとった紙と、インクの独特の匂いを感じる。

書庫の中を進み、数学書のコーナーへ移動する。本棚に向き合うと僕の方に上体を寄せながらユキはのどから絞り出すような小さな声で話し始める。

「兄さんも知ってると思うけど、基本的なことから説明するね。まず数学のコーナーは日本十進分類法だと４１０番台。つまりここの本棚の……ここから……」

ユキは『４１０数学』と書かれた仕切りを起点に上の段から下の段へ、一番下までいくと左の棚から右の棚へと、しずしずと歩きながら順に指でたどっていき、

「ここまでなの」

『４２０物理学』と書かれた仕切りの手前でちょこんと動きを止めた。そして、

「４００（ヨンヒャクゼロジュウ）番台は自然科学一般の棚だから、そこにもたまに混じってることがあるけどね」

と付け加える。

「集合の話はどれかの番号に分類されてるものじゃないから、ちょっと探しにくいかもね。でも４１０番台を全部見ても、開架にあるのは大した冊数じゃないから目を通してみようね。私はいつも端から端まで目を通すようにしてるくらいだから、慣れたら大したことはないの。

ここの図書館だと、３ヶ月くらいすると半分くらい新しい本に替わるかな。だから目を通す価値はあると思うの」

ユキは毎週のように図書館に通っている。正直、そんな頻繁に行く意味があるのだろうかと思っていたが、四半期で半分も入れ替わるのならそこそこの頻度で新しい本が見つかりそうだ。

「ちなみに初めて見る本は最近出版されたものなことが多いね。新しく買った本を開架に置いて、古いのから順に奥の書庫に移していってるんじゃないかな……あ、この本もタイトルに集合ってあるね」

ユキが手に取った本の題名は『集合と代数系』。

ユキはまず目次に目を通し、その後本文の書かれたページをパラパラとめくっていく。内容を思案するような少しの間の後、開いたページを僕の方に向けながら説明してくれた。

「３章まででちゃんとした集合の話が一通り書いてありそう。集合論だけを深く掘り下げた本はあんまりなくて、大抵は別の話と合わせて１冊になってるんだよね。言葉としての集合を勉強するだけなら、そういう本の集合の所だけ読めば十分じゃないかな。というより、それ以上深入りするとかなり特殊な分野になるみたいだから、簡単には手が出せないと思うの」

ユキに倣って僕も本棚から集合という言葉が書かれた本を探していく。大した冊数ではないとユキは言うが、僕たちの身長を軽く超える高さの本棚が横に数メートル続いているのだ。慣れていない僕には全ての棚に目を通すだけでも一苦労である。それらしい響きの題名の本をいくつか手に取ってみて、ユキを真似るわけではない……とは言い切れないが、目次を見て、本文を眺めてみる。まあ書いてあることはさっぱり理解できないのだが。ユキにも内容を確認してもらった上で、最終的に良さそうだと思ったものを３冊自分の籠に入れた。

ユキは僕の本とは別に数冊を手にとっていた。先ほどと同じように目次を見た後に本文をパラパラと眺め、そのうちの２冊を自分の籠の中に入れていた。

1.1.4 本の森の中へ〜数学書の探し方 in 図書館・後編〜

次に僕たちは少し離れた所にある検索端末の前に移動した。

図書館のあちこちに、機能は同じだが設置形態が異なる端末が置かれている。床に直接置かれたタッチパネル式の縦長のもの。椅子に座って操作する、机の上に置かれているもの。そして立ったまま操作することを想定されている、高めの机にディスプレイとキーボードなどの操作用デバイスが置かれたタイプのもの。大まかに分けてその３種類である。

ユキが選んだのは高めの机に置かれたタイプのものだった。２人で画面をのぞくのであれば椅子を並べるのは論外だし、タッチパネル式の縦長端末よりも見やすさや操作性が高いことからこのタイプを選んだのだと思う。

僕たちは並んで机の前に立ち、肩を寄せ合って少し大きめの画面をのぞき込む。

「目的の本があるなら『書名』から検索するのが良いと思うの。何となく読みたい分野があるとかなら、『キーワード』検索かな。例えば『集合』で検索してみると……うん、数学と全然関係ない本ばっかりヒットするね。あんまり賢いキーワードじゃないと思うけど『集合　数学』で検索してみると……２２３冊！うーん。でもあんまり集合論と関係ない本も多いね。これはちょっと古すぎるし。良さそうな本は……これとか、かなあ」

ユキが書名をクリックすると、その本の詳細情報が表示される。

「書庫の本を見たいときは詳細情報のページを開いて、横にある印刷のボタンをクリックするのね。そして出てきた紙に自分の名前と図書カードの番号を書いて、カウンターでお願いすれば持ってきてもらえるの」

画面の『書誌情報を印刷』というボタンをクリックすると、ディスプレイの横に置かれている小さな印刷機から書名や著者名、サイズとページ数の他、配架場所などの本の情報が書かれた感熱紙が出てくる。利用者が入れない閉架書庫の本の場合には、感熱紙の下部に氏名と利用者番号を書く欄が設けられていて、ここに書き込んで係の人にお願いすることになるらしい。

ちなみにユキが言った図書カードというのは本屋さんで使える金券のことではなく、県立図書館が発行するＩＤカードのことである。県内に住んでいるか職場や学校が県内にある人が発行申請できて、本の貸し出し手続きなどのときに使うものだ。図書カードとか貸し出しカードとか、僕たちは勝手にいろんな呼び方をしているが、ここの県立図書館が発行しているものの正式名称は『資料貸出券』である。

どうでも良いことだが猫川町立図書館の発行しているＩＤカードは『利用者カード』である。図書館ごとに自由に名前を付けているので、僕たちが好き勝手に呼んでしまうのも無理はないだろうと言い訳しておく。

……話が脱線してしまったが、ユキの文献検索講義はまだ続いている。

「自分に合った本はそうすぐには見つからないと思うけど、めげずにがんばって欲しいの。いくつか読んでいるうちに良い本に巡り会えるって感じかな。違うなって思ったらまた別の本を借りる。その繰り返しだね。

調べたいことが特になくても、適当にいろんな本を見てるうちに経験値が溜まって、いろんなことが少しずつわかるようになっていくと思うの。……あ、これ借りてみようかな」

ユキが操作する端末の画面には

公理的集合論

という名前の本の情報が表示されていた。

「集合の世界ではね、集合の全体が集合にはならないとか、素朴な集合の概念には困ったことがいくつかあるらしいの。この本は多分、そういう問題をどう考えて回避することにしてるのか、みたいな話なんじゃないかな。多分だけどね」

半分独り言なのだろう。心持ち色の抜けた声でユキがそんなことを言う。集合というのは僕が連休中に勉強することになっていたトピックだが、それに“困ったことがある”のか？

「私もよくは知らないの。大事なのは思ってたものと違っても落ち込んだりせずに次にいくことなの」

ユキ本人がわかっていないことを僕がわかろうはずもない。とりあえずはあんまり気にしないでおくことにした。

他にも言葉の組み合わせを変えて検索をかけてみて、出てきた本のうちめぼしいものの情報を印刷し、カウンターで閲覧申請をする。職員の人が書庫から持ってきてくれるのを待つ間に、他の部屋についてユキが説明してくれた。

「洋書は別の部屋にまとめられているの。２階に上がって階段の反対側にあった部屋だね。洋書には数学の本はほとんどなかったかなあ。前に数えたことがあるんだけど、そのときは数学の本は全分野合わせても４７冊しか開架にはなかったの。奥の書庫のを合わせても、４１０番台の洋書は１００冊切ってたね」

ふうん。外国の本はそんなに多くないのか。５０冊ってどれくらいだろう。さっき見た和書の本棚一段よりも少ないくらいだろうか。

「あとは２階に上がってすぐのところにある雑誌のコーナーくらいかな。数理くらぶも置いてあるよ」

「書庫の本お待ちの本庄さん」

そんなことを話しているうちに申請した本が来たようだ。

その後書庫から出してもらった数冊の本を（主にユキが）吟味して、最終的に僕は

山並講座　基礎数学　集合と位相
集合への２６話

など、計７冊の本を借りることにした。
エントランスホールにある貸し出しカウンターへユキと並んで一緒に向かう。
県立図書館の貸し出しカウンターは窓口が一つしかない。
僕が自分の籠から本を取り出して台の上に置き、貸し出し券をカウンターの人に渡すと、職員の人はリーダーでカードのバーコードを読み取り、続いて本の裏表紙に貼られたバーコードを順に読み取っていく。三週間後の返却期日が印刷されたレシートとともに本を受け取り、貸し出し手続きは終了だ。
次いで僕の隣で待機していたユキの番である。
ユキは籠からまず１冊の本を出す。１冊借り直すと言っていた本だ。
そして係の人を涙目でじっと見つめ一所懸命に口をぱくぱくさせる。しぼり出すような小さな声。
司書さんは一瞬怪訝な顔をしたが、少し考えるような仕草の後、
「貸し出しですか？」
とユキに問いかける。
ユキはうなずくか迷うように首をかしげ、再び係の人を見つめてゆっくりと口を動かす。多分「さいかしだし」と言おうとしているのだろう。声を絞り出そうとするように上下する喉の動きが痛々しい。
「再貸し出し、ですか？」
ユキがこくんとうなずくと、
「予約が入っていないか確認しますね」
本のバーコードを読み取って大丈夫であることを確かめ、再貸し出しの手続きをしてくれた。
その本を受け取るとユキは籠から別の２冊の本を取り出し、貸し出し券を再び手渡す。
「こちらは新規貸し出しですね？」
うなずくユキに、僕と同じように２冊の本の貸し出し手続きを済ませてユキに本と図書カードを渡してくれた。
手続きが無事終わったことを安堵し、ありがとうございましたと改めて頭を下げて僕たちはその場を後にした。

貸し出し手続きを済ませた僕たちはロッカールームで荷物を回収し、昼食を摂るために同じ建物の中にある喫茶店に入った。
お昼のピークは過ぎているのだろう。空席も多く、店員さんもお好きな席へどうぞと言ってくれた。店の隅に空いている４人掛けのテーブル席を見つけ、僕たちはそこに隣り合って座った。
怪訝な目で見られることが多いが、僕たちには必要なことである。家では全くそんなことはないのだが、外出先ではユキは極度に声が小さくなるからだ。
人見知りが激しいというか、対人恐怖症の一種と言うべきだろうか。慣れない相手の前では声が出なくなり、首を縦と横に振ることでなんとかコミュニケーションをとっている状態なのだ。ピークは小学校に上がって少しした頃だろうか、当時は家族や親しい友人を除いては本当に意思疎通が全くできない状態だった。
当時に比べれば今は相当改善したと言って良いだろう。さっきみたいに図書館で本を借りることもできるし、主婦するのに必要な日々の買い物だって問題なくこなしている。
もちろん本人には苦労はあると思う。何より声が詰まるその心情は僕には推し量れない苦痛を伴っているに違いない。

「基本的には数学的な内容を掘り下げるということはほとんどなくて、言葉を覚えるのがメインになると思うの。数学的な内容があるとすれば順序集合とか、同値関係とかかな。どっちもすごく自然な概念なんだけど、慣れてないとつかみづらいと思うの。がんばってね」

顔を寄せ合って話している分には表情も声の調子もとても明るいのだが。

「定義だけって言っても決して手を抜いちゃいけないけどね。定義は一番大事なこと、とらえ方のエッセンスがつまってるから。それがつかめれば、理論の展開をきれいに見通せるようになることが多いと思うの。集合論の基礎になるのは集合と写像、それに関係って言葉かな。特に関係ってのは日常の言葉とは全然違う意味だから慣れないうちは戸惑うかもしれないね」

隣り合って声の届く距離に座れるのは本当にありがたかった。

もちろん向かい合って座っても口の動きで言っていることはだいたいわかる。だが涙混じりに声を絞り出そうとする、そんなつらい思いをユキにさせたくなんてない。

「この前言ったことだけど、現代の数学は全ての“もの”を集合と写像の言葉で表現して、論理の枠で話を展開していくのね。例えば写像の言葉を使えば、曲線のパラメータ表示っていうのができて、曲線の長さを考えるときに許される、途中で立ち寄る点の順番を表現することができるの。集合論の限られた言葉に全部落とし込めるのね」

ユキはとても楽しそうに話す。

声は小さかった。周りに気を遣って声を落としているのではなく、緊張でかすれるのである。でも表情には興奮もまた交じっていて。こういう経験を重ねていって、人前でも緊張なく話せるようになれれば良いのだが……。

帰り道もこの連休中の勉強法についていろいろとアドバイスをくれたのだが、まあ例によってよくわからないわけである。帰って本を読んでみれば少しはわかるのだろうか。

ユキの話が難しくてきちんと理解できないのは今に始まったことじゃないから、特に落ち込んだりはしないけど。でもこれから先、少しずつでも理解できることが増えていったらいいな……。そのためにもがんばって勉強していこう。

1.1.5　本と向き合う時間～集合という概念１～

ユキと一緒に夕食の片付けを終え、今日借りてきた本を読んでみようと僕は自室に戻った。

机の上に積み上げた本の一冊を手に取り、目次を見る。

- 第 1 章　集合と写像
- 第 2 章　集合の濃度
- 第 3 章　順序数とツォルンの補題
- 第 4 章　距離空間
- ………

３章までで集合について書いてあって、それ以降は位相空間とかいうものについて解説してある、とユキが言ってた本だ。あいつが言うには『数学の言葉』としての集合論を覚えるならこの本の 1 章を読めば十分、らしい。

ページを進めて本文を読んでみる。

集合とは

集合とは、いくつかのものをひとまとめにした“ものの集まり”のことである。

例えば

- $0 \leq x \leq 1$ という範囲にある実数 x の全体
- $2x + 3y = 1$ という方程式をみたす平面上の点 (x, y) の全体
- 数直線 $\mathbb{R}$ で定義された連続な実数値関数の全体
- a, b, c, d という 4 つの文字の集まり

などはいずれも集合である。

この例のように、集合を構成する“もの”には数、点、関数、文字などなど、いろんなものがある。論理的考察の対象となり得るものなら、どのようなものでも集合を構成する“もの”になるのである。

ふむ。数の集まり、点の集まり、文字の集まりなど。何かを集めたものをとりあえず集合という名前で呼ぶことにする、とな。

$\mathbb{R}$ というのは見慣れない文字だな。十中八九アルファベットの R（アール）の別フォントなのだろうが。この文字は確か目次の次のページの記号一覧にあった気がする。

…………。

本書では以下の記号を用いる。
$\mathbb{N}$: 非負の整数全体からなる集合
$\mathbb{Z}$: 整数全体からなる集合
$\mathbb{Q}$: 有理数全体からなる集合
$\mathbb{R}$: 実数全体からなる集合

うん。$\mathbb{R}$ は実数の集合らしい。数直線と言えば左から右へと数を並べたものだから、『実数をひとまとめにしたもの』、つまり『実数全体からなる集合』と同じ意味なんだろう、多分。

ここまでは別に難しいことは何も書いてないな。僕は本文に戻って続きを読む。

集合 A を構成するものの一つ一つを A の要素、あるいは元（げん）と言い、a が A の要素であることを $a \in A$ のように書く。また要素でないことは $a \notin A$ と書く。

例えば $0 \leq x \leq 1$ となる実数 x の全体を A と書くと $0, 1, \frac{1}{2} \in A$ であり、$-1 \notin A$ である。

ふむ。構成要素であることを $\in$ という記号を使って書き表す、と。

ただし数学では厳密性が何より重要であるから、A が集合であるというときには“どんなものであってもそれが A の中にあるか、そうでないかがはっきりと定まっている”ことを要求する。

例えば“大きな実数の全体”というのは、ものの集まりを表していることには違いないが、例えば 10000 が入っているのか？という問いに対する答えは文脈によって変わってくるだろう。そのようなものは集合とは呼ばないのである。

厳密性が重要。和奏先生が言ってたっけ。

［数学の世界で、言葉で表現しようとすると、何（なに）であっても定義がないと困るよね。読み方で解釈が変わったりしない、厳密な定義がね。解釈がいろいろあると出せる結論も、みんなで共有できるものじゃなくなっちゃうからね］

でも『大きな実数の全体』はダメなのか？

……うーん、言葉の問題ではない気がするのだが。例えばだけど、こんなことがあったとする。

『102503894 より大きい整数の全体』なら何が要素かはっきりしてるから集合と呼んで良いだろうし、102503894 より大きい整数の全体は 103948670483 で割り切れる整数からなる集合の要素を全て含んでいるわけで、他にも 102503894 より大きい整数の全体は 193856^2 を要素に含んでいることも間違いない。

……あ、103948670483 で割り切れるってだけじゃダメか。102503894 より大きい整数の全体は 103948670483 で割り切れる正の整数からなる集合の要素を全て含んでいる、というべきだな。

こんな感じに『102503894 より大きい整数の全体』についていろいろ語り出して、こんな長い言葉を何回も言うのが面倒になって、短い名前を付けたいことはあると思う。……いや、別に 102503894 なんて意味のわからない数について何回も連呼する事態はそうそうないと思うけど、正確に言おうとすると長ったらしくなる何かを、何回も引用しなきゃいけない場面なら普通にありそうな気がする。そんなときに使う名前として『大きな整数の全体』を使うとダメなんてこともないだろう。呼び方を変えた瞬間に集合と認められなくなるなんて変だし。

集合を一つ、ぽんっ、と持って来られたときに、その説明として「これは大きい実数の集合です」では曖昧性がある。だから『大きな実数の全体』みたいな曖昧な言い方で新しい集合を持ち出すな。そんなことでは数学的に意味のあるコミュニケーションが取れない、と。この本を書いた人が言いたいのはそういうことなのだろうか？

……わからん。でもまあいいや。とりあえず先に進もう。

外延的表記法

次に個々の集合を“具体的に”表す記法を説明しよう。

一つ目は集合の要素を書き下す、外延的表記法と呼ばれるものである。

$\{\quad\}$ の中に集合の要素を書くのである。例えば 3 つの数 $1, 2, 4$ からなる集合は $\{1, 2, 4\}$ のように書く。

正の整数の全体のような集合は $\{1, 2, 3, \dots\}$ のように表すことがある。もちろんこのような場合には『$\dots$』で省略されている部分が前後の文脈から正確に判断できるように留意しなければならない。

ふむ。どういう集合かを伝えるために、要素を具体的に提示する。非常に簡単な方法だな。これなら間違いなくどんな集合かを伝えることができるだろう。むしろそれ以外の方法を思いつかないくらいである。

そんなことを頭の隅で考えながら続きの文章に目を落とした。

内包的表記法

外延的表記法は集合の要素を直接的に明記しているため、簡単な集合の場合には大変見やすい表記法である。しかし全ての要素を書き下すことができるか、あるいは代表的な要素をいくつか提示すれば残りの部分が“ $\dots$ ”で容易に推察できる場合にしか用いることができない。そのため豊かな理論を構築しようとすると、このような表記法で表せる集合のみでは不十分な場面にしばしば遭遇する。

そのようなときに用いられるのが集合の要素がみたす性質を述べる方法である。何らかの理論を展開しようとする場合に用いられる集合は、“○○という条件をみたすものの全体”のような形で提示されることが多く、有用性の高い表記法である。

このような集合の表し方を内包的表記法と言う。

先に述べた“ $0 \leq x \leq 1$ という範囲にある実数 x の全体”もそのような表現の仕方の一例である。

ああ、なるほど。条件に該当したものを集めて集合を作る、そういう方法もあるのか。

“その集合に x が入っているかどうか”

は x が性質をみたすかどうかを確認すれば良いんだから、集合を構成する要素がこの方法でもはっきりす

るわけだ。

要素を直接提示する外延的表記法に、要素のみたす性質を提示する内包的表記法。

外延的表記法の場合は、要素のリストと一つ一つ照らし合わせて、どれかと一致すれば入っているし、どれとも一致しなければ入っていない。内包的表記法の場合には条件をみたすかどうかを確認し、みたすなら入っているし、みたさないなら入っていないことになる。外延的表記でも内包的表記でも、どういう要素から構成されているかが原理的にははっきりするから曖昧性がなく、“ものの集まり”として確定するわけだ。

内包的表記法はある文字についての条件を述べることで成立する。例えば“$0 \leq x \leq 1$ という範囲にある実数 x の全体”という文章は x という文字についての条件である。この x という文字は我々の考察の対象となるものを代表的に表しており、そのような文字を我々は**変数**と呼ぶのである。

変数という、考察の対象を代表的に表す文字を用いた表記を考えたが、同様に条件として考えられるものを代表して C のような一つの文字で表す略記を用いることにしよう。C が x という変数についての条件であることを明示したい場合には $C(x)$ のように書くことにする。

さて、変数 x についての条件 $C(x)$ が与えられたとする。このとき、x に具体的な対象 a を代入して得られる文章を $C(a)$ のように書くことにするが、$C(a)$ は正しいか正しくないかは、はっきりと定まっているのであった。文章 $C(a)$ が正しいような a の全体は一つの集合をなす。それを

$$\{x \mid C(x)\}$$

のように書く。

例えば“$0 \leq x \leq 1$ という範囲にある実数 x の全体”という集合であれば条件 $C(x)$ として『x は $0 \leq x \leq 1$ の範囲にある実数』という条件を考えることになり、

$$\{x \mid x \text{ は } 0 \leq x \leq 1 \text{ の範囲にある実数 }\}$$

のように集合を書き表すわけである。

えっと、$C(a)$ と $C(x)$ は何が違うんだ？　……『具体的な対象 a を代入して得られる文章を $C(a)$ のように書く』か。うーん。つまり a は 3 とか 1/2 とかを想定してて、でもいろんなものの場合を包括的に表したいから aっていう文字を使ってるということ？

x も変数、a も変数だけど、a は実際の場面では具体的なものに文字通り置き換えられることを想定していて、x は実際の場面でも条件の中に x という文字としてそのまま使われることを想定している……??

……うーむ、言葉にすると変な感じ。わかったようなわからないような……少なくともうまく言葉にできなくて、もやもやした感じがある。

ちょっと考えを整理する意味で、計算用紙に落書きしてみた。

$C(x)$ が“x は $0 \leq x \leq 1$ の範囲にある実数”のときは x に 3 を代入すると“3 は $0 \leq 3 \leq 1$ の範囲にある実数”は正しくないから $C(3)$ は成り立たない。一方で“$0 \leq 1/2 \leq 1$”だから $C(1/2)$ は成り立つ。

具体的な要素を代入するっていうのはこういうことか？

計算用紙の文章には xって文字は条件 C の変数などで 3 つ見つけることができるが、a という文字は一つもない。これが実際の場面では a という文字が 3 や 1/2 という具体的なものに置き換えられているということ、そういう感じで良いのかな？

1.1.6　本と向き合う時間～集合という概念２～

ここまでの文章に改めて目を通してみた。

ふむ、$\{x \mid C(x)\}$ という書き方。外延的表記法で $\{0, 1, 3\}$ のように集合の要素を $\{\ \}$ でくくるのと見た目を合わせたいってことか？　……というよりは $\{\ \}$ とか $\mid$ とか、日本語の文章をとりあえず数式っぽい記号に置き換えていってる感じだろうか。

条件もまた一つの文字で表すという発想はずいぶん大胆な感じがするな。でも多分、根底にある意図というか目的は大したことではなくて、文字式を使うのと同じだろう。「どんな○○でも同じことができる」ということを一つの文章にまとめてしまいたい。それも例示によって察してもらうのではなくて厳密に伝えたい。そういうことなんだと思う。

$C(x)$ のような数についての条件を考えるということは、同じように関数についての条件とか、図形についての条件とか、さらにいえば“条件についての条件”なんてものもそのうち出てくるんだろうか。

いろいろ想像してると、話がどんどん大きくなって収拾がつかなくなりそうだ。

条件を一つの文字で表すという時点で具体的なものを常に思い浮かべながらでないとイメージがつかめないのに、条件の条件なんて出てきたら絶対に頭がパンクする。

今は基礎となる言葉を習得するための勉強中だ、発想を飛躍させるのは基礎がちゃんと身についてから。と何回か自分に言い聞かせ、気持ちを切り替えて続きの文章に目を向けた。

普遍集合について

数学の議論を行うときには多くの場合、議論の対象とするものの範囲が定められていることが多い。例えば前の項で定義した集合 $\{x \mid x$ は $0 \leq x \leq 1$ の範囲にある実数 $\}$ においては x の範囲を表す語句として“実数”という言葉が明記されていたが、文脈から明らかな場合には省略されることも多い。

そのようなときは文脈から変数 x に代入できるものの範囲が想定されているわけであるが、その範囲のことを普遍集合とか全体集合とか言うのである。

そして普遍集合を数式の中で明記したい場合には

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

のように書く。

3 という数と r という文字と x に x^2 を対応させる関数 $f(x)$ とからなる $\{3, r, f(x)\}$ のような、種類の異なる要素からなる集合は通常では考えない。その意味で集合について議論する場合には常に何らかの普遍集合が想定されているわけである。

$$\{x \mid x \text{ は } 0 \leq x \leq 1 \text{ の範囲にある実数 }\}$$

という言葉混じりの数式が

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

になるのか。日本語の表現を数式の文字に置き換えるとずいぶん短くなるんだな。

いつだったかユキが言っていた言葉がふと頭をよぎった。

［数式を使う一番の理由は、曖昧さをなくすこと。一番の理由で、本来の理由でもあるんじゃないかな。でも数式を使うと結果的にすっきりした短い文章になることも多いの。ちょっとした副産物だね］

日本語で書いてある方が読み方を忘れにくいっていう点ではわかりやすいかもしれないが、慣れたら数式に直した方が読みやすいのだろうか。……そう思って本の後ろの方のページを適当に見てみたが、字面（じづら）的には日本語の文字の割合はそんなに変わらなさそうだった。

……にしても、実数という言葉を省略してから改めて $\mathbb{R}$ という文字を使うというのはなんだかまぬけな気がしなくもないけれど。まあ同じことでもニュアンスの違いを出せるいろんな書き方があるのは悪いことではない、そう思っておこう。

それはともかく、普遍集合という枠が想定されているという視点はおもしろいと思った。

その後しばらくこまごました記号の定義が続いていた。

ちょっと休憩しようかな。伸びをして立ち上がり、ぶらぶらとリビングに繰り出す。ユキはいなかった。

部屋を覗いてみると読書中だった。背中から真剣な雰囲気を漂わせていたので声はかけず、再びリビングに戻りぼんやりとお茶を飲むことにした。

しかし前からわかっていたことだが、数学というのはいろんな記号が使われるものだな。例えば数直線の区間を表す (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$. これらはそれぞれ

$$
\begin{aligned}
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}
\end{aligned}
$$

という集合を表す表記として一般的らしい。(（丸いカッコ）が端点を除外で [（角張ったカッコ）は端点も含む。

他にも整数 a が整数 b を割り切ることを

$$a \mid b$$

のように書いたり、a で割った余りが b と c で等しいことを

$$b \equiv c \pmod{a}$$

と書いたり。

確かに複雑なことをやり出すと、頻繁に出てくるものには簡潔な記号を用意しておかないと、とても読めたものではなくなる気はする。確かに実数の区間とかは中学レベルでも頻繁に出てきてたし、先に進んでもいっぱい出てくるんだろうな。

さて、そろそろ休憩終了。続きを読もう。

集合の相当

“ものの集まり”という集合の概念から当然のことであるが、集合はその要素によって完全に決定される。中身が全く同じなのに異なる二つの集合は存在しないのである。

ふむ。そりゃそうだろう。

より形式的には、集合の相等が次のように定義される。すなわち集合 A, B は、どんな A の要素も B の要素であり、かつどんな B の要素も A の要素であるときに A と B は等しいと言い、$A = B$ と書かれるのである。

え !?

『集合の相当が定義される』だって？　その表現に強い違和感を覚えた。

［誤解の余地をなくすために定義を与えることは大切でね。そしてときとして一番難しいところなの］

ユキの言葉である。この言葉の意味はわかっているつもりだ。つもり、だった。同じ言葉を使いながらも自分と相手が全く違うことを想像していたら、意思の疎通がうまくいかなくなる。そのために定義をきちんと定(き)めておく必要があるのだ、と。そういう意味だと思っているし、その原則に従えば“ 等しい ”という言葉も、どういう意味なのか認識を共有しておかなければいけないのは筋だ。

筋ではあるのだが、それでも違和感を持たずにはいられない。……だって等しいとか等しくないって、全てのことの前提にあることなんじゃないのか？　そういうことも『定義しなければならない』ことの対象になるのだろうか。

うまいたとえが見つからないが、例えば $\sin\pi = 0$ という式。これを理解するには $\sin$(三角関数) の定義をわかっていることが前提になる。$\sin\pi$ の定義は、

x 軸の正方向から単位円周に沿ってぐるっと π だけ回ったところの y 座標の値

だ。それが 0 だから $\sin\pi = 0$ になる、そういうふうに納得したはずだった。納得するための道中に『y 座標の値を表す数が 0 という数と等しいとはどういうことか』なんて疑問を、僕はこれっぽっちも持ってはいなかった。

もしも等しいってことがどういうことか考えなきゃいけないんだったら、$\sin\pi = 0$ と $0 = \sin\pi$ が同じ式なのかすらわからなくて、$\sin$ とは何か、どころの騒ぎではなくなるんじゃないだろうか。

y 座標の 0 という所に注目しながら単位円上を半周してみるとちょうど終点がそこに重なるから $0 = \sin\pi$ になる、みたいな別の理屈が必要なのだろうか。そうじゃなくてもっと簡単に、$\sin\pi = 0$ の左辺と右辺を入れ替えることができる理屈があるのか。

三角関数を定義するにしても、長さを定義するにしても、2 つの実数が等しいとか等しくないってことは大前提としてはっきりしてなきゃ、こういう不都合がいろいろ出てくるような気がする。2 つの実数が等しいということがはっきりしない状態では、三角関数の話も長さの話も、実数値に関するあらゆる事柄が、定義を含めて全て崩壊してしまうんじゃないだろうか。

うーむ、自分でも何を考えているのかわからなくなってきた。

疑問点も全く漠然としたそんな状態でしばらく悩んだが、結局よくわからなかった。

……とても気持ち悪いが、これは一旦脇に置いてとりあえず続きを読んでみるか。

例えば外延的表記で $A = \{3, 5, 7\}$ と表される集合は、2 より大きく 10 よりも小さい素数の集合

$$B = \{n \mid n \text{ は } 2 < n < 10 \text{ なる素数 }\}$$

と同じ要素からなるし、3 以上 8 以下の奇数の集合

$$C = \{n \mid n \text{ は } 3 \leq n \leq 8 \text{ なる奇数 }\}$$

とも同じ要素を持つ。したがって $A = B = C$ となる。これらは全く異なる条件（A や C の定義に素数という言葉はないし、A や B の定義には 8 という数は現れない）から与えられる集合ではあるが、要素が等しいということをもって同じ集合とみなされるわけである。

うん。まあこの 3 つの集合 A, B, C が等しいのはわかる。この例に限らず A と B が“ 同じ要素を持つ集合 ”なら A と B は同じ集合なんだろう。それはなんとなく納得できる。

わからないのはそこではないのだけど、先の文章は別の話題に移っていて僕の疑問に答えてくれそうにはなかった。

“ 同じ要素を持つなら同じ集合である。”……まあ、とりあえずはそれで良しとしておこうか。

時計を見やると針はいつもならもう寝ている時刻を指していた。

見返してみるとほんの 3 ページほどしか進んでいない。ユキを見ていると 1 日に何十ページも読んでるイメージがあったが、なかなかうまくいかないな。これが経験の差というやつなのだろうか……。

頭が冴えてすぐには眠れそうになかったが、僕は電気を消してベッドに身を横たえた。

等しいの定義についてはまたユキや先輩たちに訊いてみよう。

1.1.7　本と向き合う時間〜集合という概念３〜

翌日。朝食の片付けを終えた僕たちは居間で朝のひとときをのんびりと過ごしていた。

今日も快晴。うららかな春の一日になりそうだったが、昨夜（ゆうべ）のことが僕をもやもやとした気持ちにさせていた。

「同じって、定義することなのかな」

パソコンでのんびり自分用ノートを作っていたユキがウィンドウを閉じてぼんやり立ち上がったところで、その解消を試みるため昨日の疑問を伝えてみた。

「集合の相当……定義って言葉を使ってる本がときどきあるね。定義って言葉選びが適切かどうかは私にはわからないなあ。でも要素が一致することが等しいための必要十分条件ではあるね。つまり“ 要素が同じ ”ってことは $\overset{\text{集合が等しいってこと}}{A = B}$ と同じことなの」

「んー、まあそれは僕も納得できるんだけどね」

「定義するって言い方が気になる？　うん、私も基本的には兄さんと同じ意見かな。等しいという言葉ももちろんコミュニケーションに使われるわけだから、意味を明確にする対象と言われたら反論はしづらいんだけど……、でも何かの意味を明確にしようとすると、他の何かを参照しなきゃいけなくて、その参照したことの意味を明確にするにはまた別のものを……ってずっと遡っていかなきゃいけないよね。等しいっていうのはもうどこにも遡ることができないくらいに最初に決まってなきゃ、他の何かを語ることもできない。それくらい根本的な概念なんじゃないかと、兄さんは思ったってことだよね？」

そうなんだろうか。そこまできちんと整理できているわけではなかったし、微妙に迷いはあったが、とりあえず

「多分、そういうことだと思う」

と答えておいた。ユキの言うことをちゃんと理解できたわけではないと思うけど、なんとなく正しい気はしたので。

「その感覚って、多分正しいと思うの。えっとね……」

ちらりとこちらを見やるユキの視線に、微妙な僕の迷いは見透かされているなと感じる。

「そうだなあ、例えばだけどね、

$$2 + 1 \in \{3\} \tag{1.1.1}$$

みたいな式は納得できると思うの。$\overset{\text{2 足 す 1 は 3}}{2 + 1 = 3}$ で $\overset{\text{3は3を要素に持つ集合の要素}}{3 \in \{3\}}$ だからね。だから数が同じってことがはっきりしていないと $\{3\}$って集合の要素かどうかがはっきりしなくて、そうすると集合が等しいってことも結局わからなくなるよね」

「んーっと……うん、確かに。それはそうだよね」

ユキが言ってることは間違ってはいないと思う。でも、だから何？

「まあ二つの数が等しいってのは特に気にしなくても良いと思うけど。でもね、もし要素が集合だったらどう？　えっと……」

ユキは僕が昨日読んでいた本のページを繰る。

「兄さん、この辺は昨日読んだんだね。じゃあ例えばこのページにある集合の等式、

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 2 < n < 10 \text{ で } n \text{ は素数 }\} = \{3, 5, 7\} \tag{1.1.2}$$

これは成り立ちそうだよね。とすればさっきの $2+1=3$ と同じように

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 2 < n < 10 \text{ で } n \text{ は素数 }\} \in \{\{3,5,7\}\} \tag{1.1.3}$$

になるはずなの」

「あ……！」

$\{\{3,5,7\}\}$、つまり $\{3,5,7\}$っていう集合を要素とする集合を考えるのか。

［論理的考察の対象となり得るものなら、どんなものでも集合を構成する“もの”になるのである。］

昨日読んだところに例として挙げられていたのは数とか点とか関数とかだったが、集合自体も論理的な考察の対象だから、集合を集めて集合を作るっていう発想だって当然あるだろう。

(1.1.2) が正しくて $\{3,5,7\} \in \{\{3,5,7\}\}$ だから (1.1.3) になる。$2+1=3$ と $3 \in \{3\}$ から (1.1.1) になるのと同じ理屈だ。

「なるほど。確かにそうなるね」

「でもね、集合が等しいってことがどういうことかはっきりしない段階では、$\overset{\text{集合の相当}}{(1.1.2)}$がわからないわけ。そうすると、$\overset{\text{集合の要素}}{(1.1.3)}$になる根拠がなくなっちゃうんだよ。

つまり、『要素が一致することが集合が等しいことの定義』だとすれば、$\overset{\text{相当}}{=}$ の定義に $\overset{\text{要素関係}}{\in}$ が使われて、$\in$ の定義に $=$ が使われるって状態になってしまってるのね。もちろん

$$\overset{\text{等しいものが同じ集合の要素になる}}{(a=b, a \in A) \Longrightarrow b \in A}$$

ってことを疑うなら話は別だけどね」

なるほど！　等しいということは定義以前に初めからあるんじゃないかって思っていたが、こう言われると『等しいことの定義がない状態』が、いかに不便なことかがよくわかる。というよりもかなり問題があるように思えてきた。

「同じところをグルグル回る感じ。落とし所が見つからなくなっちゃうんだよね。だから要素の一致が集合の相当だってなんの断りもなく言われると、違和感があるのは確かなんだよね。定義は『はじまり』に与えられる名前のはずだからね。

この本を書いた人はね、集合が等しいことが、要素が同じってことと同値だって伝えたかっただけなんじゃないかな。私ならそういうふうに理解しておくの。

根本的な事柄についてはともかく、普通の言葉を新しく導入しようとする場合だと、定義は常に必要十分条件になってるのね。だから必要十分条件だよ、ってことを言いたくて“定義する”って言葉をつい使っちゃったんじゃないのかな」

そんな会話の後昼食を挟み、昨日の本をさらに読み進めていった。

> 集合 A の一部の要素を集めたものを A の部分集合という。より厳密に言えば、集合 B に属するどんな要素も A の要素であるとき、B は A の部分集合である、というのである。B が A の部分集合であることは「B は A に含まれる」とか「A は B を含む」とも言い、$B \subseteq A$ と書く。
>
> また集合 A とは異なる A の部分集合を A の真部分集合と言い、$B \subsetneq A$ と書く。すなわち $B \subsetneq A$ は“$B \subseteq A$ であり、かつ $B \neq A$”であることを表すのである。

部分集合の他にも写像、直積、関係……。そんな言葉が出てきたが基本的には言葉だけという感じで、これと言って問題なく理解できたと思う。

集中して勉強した後の、どこか心地よい熱が頭から身体にじんわりと降りてくる。

受験が終わっても僕がこんなに勉強するなんて、正直思ってもみなかった。新しい知識が入ってくるおもしろさに、授業に合わせて教科書や参考書で予習・復習する、そういう既定路線を超えたのだというある種の優越感も加わって、不思議な快感があった。

……でもユキはいつもこんなことをやってるんだよな。いや、僕の今やってることと比較できるようなレベルじゃないだろうけど。

淡中さんも言っていた。

［大学に行けば数学しかしなくなる分、深く考える時間もとれますし、またとらないといけないんですよね。その分は授業を超えて自分で取り組まなければいけません］

与えられた課題を見てるだけで許される時間は人生の中でもほんの少ししかないくて、不登校という道はそのほんの少しの時間を手放すことなのかもしれない。

その代わりに一つのことに集中できる、大学生に近い時間の使い方ができる、ようになるのだろうか。

…………

だが、そんな感傷的な気持ちを抱く余裕があるのはそこまでだった。

夕食を挟み、続きの解読を試みると文章の雰囲気が一転する。

定義 1.1.1. 集合 A 上の 2 項関係 $\sim$ は次の条件をみたすとき**同値関係**であるという。

（反射律）$a \sim a$ が全ての $a \in A$ に対して成り立つ。

（対称律）$a \sim b$ ならば $b \sim a$ である。

（推移律）$a \sim b,\, b \sim c$ ならば $a \sim c$ である。

だとか、

定義 1.1.2. 集合 A 上の同値関係 $\sim$ に対して $a/\!\sim \,:= \{b \in A \mid b \sim a\}$ を $\sim$ による a の属する**同値類**といい、

$$A/\!\sim \,:= \{a/\!\sim \mid a \in A\}$$

を A の $\sim$ による**商集合**という。

だとか、

定義 1.1.3. A を集合とするとき、次の条件をみたす集合 $\mathcal{A}$ を A の**分割**という：

(p1) 全ての $X \in \mathcal{A}$ は A の部分集合である。

(p2) 全ての $a \in A$ に対し $a \in B$ となる $X \in \mathcal{A}$ が唯一つ（ただひと）存在する。

(p3) $\emptyset \notin \mathcal{A}$ である。

という感じのなんだかよくわからない定義が続出する。そしてその節の最後には『同値関係と分割は次のように一対一に対応する』という前置きの上で次のようなことが書かれていた。

命題 1.1.4. A を集合とする。

(1) $\sim$ が A 上の同値関係ならば $A/{\sim}$ は A の分割である。

(2) $\mathcal{A}$ が A の分割のとき、

$$a \sim b \;:\Longleftrightarrow\; a, b \in X \text{ となる } X \in \mathcal{A} \text{ が存在する}$$

とおくと $\sim$ は A 上の同値関係である。

(3) 前段の $\sim$ を $\sim_{\mathcal{A}}$ と書くことにすると $A/{\sim_{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$、$\sim_{A/\sim} = \sim$ が成り立つ。

同値関係に分割に。図書館帰りの喫茶店でユキが言っていたものの一つだ。おそらく大事なものなんだろう。気を引き締めて取り組まねばと思うのだが。……思うのだが、何だこれ?!

一つ一つの言葉を見れば決して難しいことが書いてあるわけではない。……最後の $\sim_{A/\sim} = \sim$ は、なんか複雑でよくわからないけど、それを除けば多分大丈夫だと思う。

$a/{\sim}$ は $b \sim a$ になる b を集めた集合だし、$A/{\sim}$ は $a/{\sim}$ の形の集合を集めた集合だ。

だが、個々の言葉がわかっても全体としての意味がまるで理解できない。結局 $\overset{\text{商集合}}{A/{\sim}}$ や $\overset{\text{分割}}{\mathcal{A}}$ はどういう集合なのか……。

1.1.8 具体例で考えよう～グループ分けの２つの表現１～

次の日。

２人で朝食の片付けを終えて、ユキの髪を編みながら僕は昨日勉強した感想を話してみる。

「集合がものの集まりっていうのはわかったけどさ、商集合っていうのはなんかイメージしづらいね」

編むには少しなめらかすぎる髪を 3 つの束に分ける。右の束を真ん中のと入れ替えて、真ん中に来た束を左手に渡して左の束と入れ替えて。ここちよい感触を指先に感じながら、ほどけないようにしっかりと編み込んでいく。

「昨日もちょっとした例はあったけど、集合の集合というのに違和感があるのかな？　『ものの集まり』って言うときの“もの”って言葉は、数だったり図形だったり関数だったりを表すのが典型だけど、集合だって“もの”って考えるんだよね。一つの集合自体を、内部構造を抜きに集合の要素の一つとして、点みたいな感じにイメージできるかがポイントかな」

集合の集合。昨日も出てきた。

集合の集合というのは $A = \{\{1, 3, 4\}, \{2, 5\}\}$ みたいなやつだ。$a = \{1, 3, 4\}$ や $b = \{2, 5\}$ は集合ではあるけれど、$1 \in a$ みたいな a の集合としての構造をフェードアウトさせて、ただ A という集合の要素であるということに焦点を合わせて $A = \{a, b\}$ みたいな見方ができるか。そこが明確なイメージを描けるか否かの分岐点ではないかとユキは言う。

［集合とは、いくつかのものをひとまとめにした“ものの集まり”のことである］

“もの”というのはつまり“名詞で表される対象”というような意図だと思う。集合だってそういう意味で“もの”なんだから、集合を集めた集合を考えるのも思考としては自然な発想だ。

だが発想が自然だからと言って、心の中に焦点を結んだ像が描けるかというと難しいのだと。要素になる一つ一つの集合を点みたいにとらえること、それが『集合の集合』を直感的に把握するための鍵だと、ユキはそう言ってるのだろうか。

「発想自体はすごく自然なものだと思うんだけどね。集合の集合自体はなんとかイメージできても、集合を操作したり他のものとの絡めて何かを考えようとすると途端にわからなくなる。兄さんはそんな感じな

のかな？」

「うーん……そうなのかなあ？」

集合の操作がわからない。分割と同値関係の対応が見えないというその 1 点だけを見たら、確かにそう言えなくもないのだろうが、あまりしっくりはこなかった。

華奢な背中を背景に三つ編みを作りながら、ユキの言葉の意味を考えていると、

「たっくーん、ゆきちゃーん」

と底抜けに明るい声が庭の方から聞こえてきて、舞ちゃんが顔を覗かせた。

僕たちの姿を見つけるとやや遠慮がちにこちらを見上げながら訊ねてくる。

「お取り込み中？」

「大丈夫だよ」

形が崩れないようユキの髪をゴムで留めて僕は立ち上がる。

「舞花ちゃん、こんにちは。兄さん、ありがとう」

舞ちゃんにぺこりと頭を下げるユキ。

舞ちゃんは軽やかに手を振ってにこりとユキに応え、リビングに上がってきた。

「わ、何これ？」

テーブルの上に置かれた本と計算用紙をまじまじとのぞき込む。混乱の結果、見当違いのことが書き散らされている。

「部活の予習というか、基礎固めでね。一昨日から読んでるんだ」

僕は一連の経緯と昨日までに読んだところの内容をダイジェストで説明してみた。

「ふんふん、なるほど。つまり分割っていうのは、$\overset{\text{エー}}{A}$ をいくつかに分けるってことだね」

同値関係と分割のところまでの説明を聞いた舞ちゃんが最初に発した言葉である。

内容をきちんと理解できていない人（僕のことだ）による、おそらく的外れな部分も多いだろう説明を聞いただけなのに、なぜか舞ちゃんは僕よりもちゃんと理解できているみたいだった。

「そうなの？　全然そういう感覚はなかったけど……」

分割にも同値関係にもこれと言ったイメージを持てていない僕は、そんな頼りない感想を漏らすくらいしかできず。

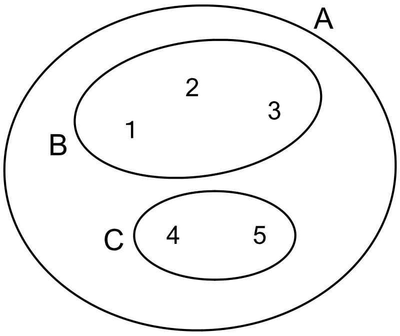
僕たちのやりとりをなんとなく聞いていたのだろう、リビングで本を読んでいたユキは顔を上げ、

「そうだね。分割はいくつかの集合に分けてその断片を集めたもの。同値関係よりも分割の方が自然なものだと思うの」

そんなコメントをしてすとすとこちらに歩み寄ってきた。ちなみにユキの読んでいたのは箱玉系の数理とかいうタイトルの図書館で借りていた本である。内容は知らない。

「$\overset{\text{始めの集合}}{A}$ の部分集合を集めたもので、$\overset{\text{1つ1つの要素}}{a \in A}$ が $\overset{\text{どれか1つの集合}}{X \in \mathcal{A}}$ に入ってるんだよね。それって $\overset{\text{集合}}{X}$ の 1 つ 1 つがグループで、みんなどれかに所属してるってことじゃないの？　例えばさ、」

そう言って舞ちゃんはボールペンを持ち、計算用紙に絵を描き始める。1 から 5 の数字を適当に書き散らし、それら全てを囲むように大きな丸をさらりと描く。続いて 1, 2, 3 のみを囲む丸と 4, 5 のみを囲む丸を描いた。そして大きな丸の脇に A という文字を、1, 2 ,3 を囲む丸の脇に B、4, 5 を囲む丸に C という印をつけた。



「こんな感じに、Aって集合を B と C に分けてるってことじゃない？」

僕はその絵を見つめ、考える。$1, 2, 3$ がひとかたまりで、それとは別に 4 と 5 でかたまりになる……確かにグループ分けしてるみたいだけど……。この絵が、本に書いてあった同値関係や分割の定義とどうつながるのか。

「つまりこの絵だと、Aって集合が、B と C に分けたもの、正確に言えば

$$\overset{B\text{ と }C\text{ からなる集合}}{\mathcal{A} = \{B, C\}}$$

だね。$\overset{\text{これ}}{\mathcal{A}}$が A の分割の一例なのね」

いまいち理解できない僕の心中を察してか、ユキは僕の横から手を伸ばし、舞ちゃんの描いた絵の脇に次のように書き記す。

$$\begin{aligned} &A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ &B = \{1, 2, 3\}, \quad C = \{4, 5\} \\ &\mathcal{A} = \{B, C\} \end{aligned}$$

絵の状況を表す式だろう。それを見てうんうん、と大きくうなずく舞ちゃん。

ふむ……。$\{B, C\}$ という、2 つの集合を要素に持つ集合が分割である、と。

昨日読んでいた本をめくり、分割の定義を改めて読んでみる。

［ (p1)　全ての $X \in \mathcal{A}$ は A の部分集合である。］

分割の条件その 1 だ。

$B \subseteq A$ だし $C \subseteq A$ だから、これは確かに成り立っている。

［ (p2)　全ての $a \in A$ に対し $a \in B$ となる $B \in \mathcal{A}$ が唯一（ただひと）つ存在する。］

分割の条件その 2 だ。

2 は $\mathcal{A}$ の中では B にしか入ってないし、1 や 3 もそうだ。4 と 5 は C のみという感じで、どれも 1 つの集合だけに入っている。

［ (p3)　$\emptyset \notin \mathcal{A}$］

最後の条件。えっと、$\emptyset$ は空集合（くうしゅうごう）と言うんだったか。要素が一つもない集合を表す記号だ。$\mathcal{A}$ は B と C のみが要素だが、B も C も空集合じゃないから $\emptyset \notin \mathcal{A}$ だ。

確かに $\{B, C\}$ は定義 1.1.3 の条件を全てみたしている。

グループ分けが分割、か。

もう一度分割の定義をじっとにらんでみる。

…………

あ、そうか。

- みんなどこかのグループに所属し：(p2) の B があること
- 複数のグループに所属することはなく：(p2) の B が一つということ
- 構成員はどのグループにもいる：(p3)

ということか。

残りの (p1) は……$\mathcal{A}$ の一つ一つをグループと呼ぶなら

- どのグループも A の外から紛れ込んだメンバーはいない

という感じだろうか。

なるほど……！　一気に視界が開けたような感じがした。分割は確かにグループ分けなんだ。

「じゃあ同値関係というのは……」

ページを繰ってその記述を探す。

「えーっと……命題 1.1.4 の 2 番目だよね。今の場合だと $1 \sim b$（これ）になるのは $b \in B = \{1,2,3\}$（bが1か2か3）のときか。$2 \sim b$ も同じで、$3 \sim b$ もだね。

……この $\sim$（波打ってるの）はなんて読むんだろ？」

ユキはふるると首を振り、舞ちゃんもわからないという。まあそりゃそうか。僕や舞ちゃんはもちろん、ユキだって本は読むけど声を介して誰かとやりとりする経験はほぼないだろうから。

「同じように、$4 \sim b$ とか $5 \sim b$ になるのは $b \in C = \{4,5\}$ のときなんだね」

「うんうん！　まとめるとこんな感じかな」

舞ちゃんの右手がボールペンをすらすらと滑らせてこんな表を書き上げた。定規で引いた寸分のゆがみもない線とは違うが、均整のとれた配置がとてもきれいだ。

左の 3 からと上の 2 からのところが交わるマスに〇が書かれているのは $3 \sim 2$ という意味で、4 と 3 の交わるところが×なのは $4 \sim 3$ ではないということか。……$4 \not\sim 3$ みたいに書くことにしようかな。

$\sim$	1	2	3	4	5	
1	〇	〇	〇	×	×	
2	〇	〇	〇	×	×	
3	〇	〇	〇	×	×	$3 \sim 2$
4	×	×	×	〇	〇	$4 \not\sim 3$
5	×	×	×	〇	〇	

他の組み合わせも全てをまとめると、こういう表になるのか。ふむ、確かに。

「〇（まる）で正方形が 2 つ。$1,2,3$ のところと $4,5$ のところにできているけど、それが最初の $B = \{1,2,3\}$ と $C = \{4,5\}$ に対応してるってこと？」

「そういうことなのかなー？」

少しわかってきた気がする。まだ理解しなければならないことは残っているだろうけど。

「舞ちゃんすごいなあ。今の話だけでここまでわかっちゃうんだ」

「一つ一つきちんと確認してけば良いだけだからね。こんがらがっちゃうと訳わかんなくなるけど、冷静に見れば難しくないよ」

言われてみれば確かにそうだ。わかった上で改めて見ればどうということはない。だがそれを自分で整理して考えられるのは、ゲームで鍛えたスキルだろうか。

　戦略的なテーブルゲームの詰めなんかは、舞ちゃんいわく、場合分けを頭の中できちんとこなすのが全て、らしい。今の話もそれに通じるところがあるような気がする。

　さて、この例はわかった。次は何をすれば良いのかと考えていると、ユキが背中から肩越しに腕を回してきた。百合のように白い腕が目に入る。そして背中にふわりと体重をかけながら、

　「$\overset{\text{同値関係}}{\sim}$ から分割を作ってみたら良いんじゃないかと思うの」

　と言う。

　「命題1.1.4の 1 番目のこと？　そっか、書いてある命題とか定義を 1 つずつ見ていくしかないもんね。えっと、」

　ページをめくり該当する記述を探す舞ちゃん。

　［命題 1.1.4.(1) $\sim$ が A 上の同値関係ならば $A/\sim$ は A の分割である］

　「つまりこの $\overset{\text{にょろ}}{\sim}$ からできる $\overset{\text{集合}}{A/\sim}$ が何なのかってことだね。これはえーっと、」

　［定義 1.1.2. 集合 A 上の同値関係 $\sim$ に対して $a/\sim := \{b \in A \mid b \sim a\}$ を $\sim$ による a の属する同値類といい、

$$A/\sim := \{a/\sim \mid a \in A\}$$

を A の $\sim$ による商集合という］

　「だから $\overset{\text{小さい}a\text{割る波印}}{a/\sim}$ ってものを集めたのが $\overset{\text{大きい}A\text{の波印}}{A/\sim}$ だね。$A = \{1,2,3,4,5\}$ だから、

$$\begin{aligned} A/\sim &= \{a/\sim \mid a \in A\} \\ &= \{1/\sim, 2/\sim, 3/\sim, 4/\sim, 5/\sim\} \end{aligned}$$

だね」

　なるほど。内包的表記法は数が少ない場合だと外延的表記法に直せるのか。ずいぶん具体的になって俄然イメージが湧く。

　今日の舞ちゃんはなんだか絶好調だなあ。立て板に水ってこういうことを言うんだろうか。言葉が次々と出てきて、僕の頭の中もどんどんイメージが明確になってくる。

　舞ちゃんは続ける。

　「ということはこの $1/\sim$ とかがどんな集合かを考えればいいってことかな。1 のとこから横に見てって○が付いてるのは $1,2,3$ の 3 つだから、

$$1/\sim = \{1,2,3\}$$

だね！」

　ふむ、確かに。

　「おんなじように

$$\begin{aligned} 2/\sim &= \{1,2,3\}, & 3/\sim &= \{1,2,3\} \\ 4/\sim &= \{4,5\}, & 5/\sim &= \{4,5\} \end{aligned}$$

だから、

$$A/\sim = \{\{1,2,3\},\{1,2,3\},\{1,2,3\},\{4,5\},\{4,5\}\}$$

ってなるのかな」

　なるほど、そんなふうになるのか。$\{1,2,3\}$ が 3 回、$\{4,5\}$ は 2 回出てきてるけど、集合は何が要素か、だけが大事だから重複してるのは消して

$$A/\sim = \{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$$

って形に整理できるわけだ。……あれ？　これって $\overset{B\ \text{と}\ C}{\{B, C\}}$ だから、$\mathcal{A}$ だな。

「ほんとだね。うーんと、同じところに入ってるものに○を付けて、○を付けたところをひとまとめにしてるんだよね。だから当然のことなのかも？」

というのが舞ちゃんの反応。そういうことなのか？　そうなのかもしれないな。

1.1.9　具体例で考えよう～グループ分けの２つの表現２～

「それが命題 1.1.4 の最後の項目、その前半だね。$\overset{\text{分割}}{\mathcal{A}}$ から $\overset{\text{同値関係}}{\sim}$ を作って、そこから $\overset{\text{商集合}}{A/\sim}$ を作ったら $\overset{\text{もとの分割}}{\mathcal{A}}$ になるってこと」

僕たちのやりとりを見ていたユキが口を開き、僕の肩越しに本の一文を指さす。

［命題 1.1.4.(3) 前段の $\sim$ を $\sim_{\mathcal{A}}$ と書くことにすると $A/\sim_{\mathcal{A}} = \mathcal{A},$ ］

おお、なるほど！　命題 1.1.4 の (3) はこういうことだったのか。

「そして命題1.1.4.(3)（この項目）の後半は逆の対応のことが書いてあるのね」

続きの文章を指でなぞるユキ。

［$\sim_{A/\sim} = \sim$ が成り立つ。］

「これは $\overset{\text{同値関係}}{\sim}$ から $\overset{\text{商集合}}{A/\sim}$ を作って、$\overset{\text{対応する同値関係}}{\sim_{A/\sim}}$ を考えれば $\overset{\text{もとの同値関係}}{\sim}$ になるってことね。

２つを合わせると、同値関係と分割は一対一に対応してるってことになるの」

「逆の対応かー。同値関係なるものから分割を作って、その分割からまた同値関係を作るとあら不思議、元に戻っちゃいます！ってことだね」

パッと手を広げてコミカルなポーズを決める舞ちゃん。

ふむ。えっと、

［$\sim_{A/\sim} = \sim$ が成り立つ。］

か。$A/\sim$ は同値関係 $\sim$ から作られる分割。$\sim_{A/\sim}$ というのは、分割 $A/\sim$ から作られる同値関係という意味か。$\sim$ という記号の下に分割 $\mathcal{A}$ を書いて、$\mathcal{A}$ が決める同値関係を表すという約束事で、$\mathcal{A}$ を $A/\sim$ に置き換えたもの、というわけだな。

なるほど。舞ちゃんの言うとおりのことが書かれている。

特定の同値関係を表す $\sim$ と分割から定まる同値関係を表す $\sim$ が同じ記号で紛らわしいけど……。そうぼやくとユキは、

「確かにね。でも結構こういう書き方って多い気がするなあ。本当は良くないと思うんだけど、“同値関係”を表す代名詞っぽい気持ちで $\overset{\text{なみじるし}}{\sim}$ を使ってるんだと思うの。$\overset{\text{分割}}{\mathcal{A}}$ から定（き）まる同値関係だよ、って意味で下に小さく $\mathcal{A}$って補足がある、みたいな気持ちかなあ？」

この表の $\sim$ からできる分割は $\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3, \}, \{4, 5\}\}$ で、$\mathcal{A}$ から定まる同値関係は表の $\sim$ だから、この場合は大丈夫だ。

だが、他の同値関係でも同じようにいくのか？　というか今さら感があるけれど、そもそもどういうものが同値関係なのかがよくわからない。そんなもやもやを口にしてみると、

「とりあえず、この表が同値関係になってることを確認してみたら？　そうすれば同値関係がどういうものかも、同値関係と分割がどんなふうに対応してるかも見えてくると思うの」

と、妙にあっさりした口調でユキは言う。

そんな簡単なことなんだろうか。内心いぶかりながらも、とりあえずアドバイスにしたがってみることにした。

「えっと、同値関係というのは反射律、対称律、推移律っていう３つの性質が成り立つってことだから……一つずつ確かめていけばいいのか。じゃあまずは反射律から」

反射律：$a \sim a.$

「$A=\{1,2,3,4,5\}$ の場合だと $1\sim1,\ 2\sim2,\ 3\sim3,\ 4\sim4,\ 5\sim5$。つまり左上から右下への対角線に〇が並んでいるということかな。それが反射律の条件だね。ふむ。確かに対角線には〇が並んでいるからこれは大丈夫か」

舞ちゃんがうんうんと相づちを打ってるのを見て、次へ進む。

<u>対称律</u>：$a\sim b$ なら $b\sim a.$

「これはえーっと、対角線で折り返したら重なる、つまり『対角線に関して対称な』表になっているってことか。

例えば『$2\sim1$ なら $1\sim2$』は、2 の段と 1 の列の交差するところに〇が書かれていたら 1 の段と 2 の列の交差点にも〇が描いてなきゃいけない、みたいなことだね。

他のところも同じように、〇の折り返して重なるところは〇だし、×の対称点は×になってる。だから大丈夫」

「そうそう、その調子なの」

とても近くから聞こえるユキの言葉に若干いい気になりながら、次の条件に思考を移した。

<u>推移律</u>：$a\sim b,\ b\sim c$ なら $a\sim c.$

……のだが、

「うーん、これはどういうことだろう？　表との関係がよくわからないな」

首をひねる。少しの間、考える沈黙。

最初に口を開いたのは舞ちゃんだった。

「そうだねー。a,b,c って 3 つも文字があるもんね。表は縦と横の 2 つしかないのに。

とりあえずさ、順番に見ていこうよ」

「順番に、まずは $a=1$ のときから、みたいなこと？」

そうそう、と相づちを打つ舞ちゃん。

「じゃあ、$a=1$ の場合からいくよ。前提の $a\sim b,\ b\sim c$ が成り立つ b と c がどれくらいあるかというと……、$a\sim b$ で a と b がつながってるから b の可能性から見てみると、$1\sim b$ となるのは $b=1,2,3$ の 3 つだね」

$$\{b\in A\mid 1\sim b\}=\{1,2,3\}$$

と書き付ける。ユキを背負うような体勢で書いたせいで微妙に字がゆがんでしまった。

僕は続けた。

「b が $1,2,3$ の、それぞれの場合に分けて考えなきゃいけないのかな。

$b=1$ のとき、$b\sim c$ となる c は $c=1,2,3$ の 3 つ。c が 1 でも 2 でも 3 でも、$a=1$ だから結論の $a\sim c$ は成り立ってるね」

「a や b や c を変えながら、一つ一つ順番に調べていくしかないのかー。大変だね」

苦笑いする舞ちゃん。

確かにそうなんだよな。でもまあ着実と言えば着実だし、嫌になったらそのときにまた考えれば良い。そう思って僕はさらに続ける。

「$b=2$ のときはどうだろう。$2\sim c$ となるのは $c=1,2,3$ の 3 つか。あれ、さっきと同じだね。だからやっぱり $a\sim c$ は大丈夫だね。

$b=3$ だと……今度も $b\sim c$ となるのは $c=1,2,3$ の場合だな。だから $a=1$ の場合は『$1\sim b,\ b\sim c$ なら $1\sim c$』が成り立つんだね」

ふむ。同じように $a=2,3,4,5$ のときにも一つ一つ、成り立つかどうか考えていくんだな。

「次に $a=2$ の場合。$\overset{2\sim b\text{となるのは}b\text{が}1\text{か}2\text{か}3\text{のとき}}{\{b\in A\mid 2\sim b\}=\{1,2,3\}}$ だね。……あれ？　$\overset{\text{さっき}}{a=1}$ と同じだな。ということは $b\sim c$ となる c として考えなきゃいけないのは同じく $c=1,2,3$ の 3 つか。$a=2, c=1,2,3$ だから $a\sim c$ としては $2\sim 1$, $2\sim 2$, $2\sim 3$ の 3 つだけど、これは全部成り立ってる。

つまり $a=2$ のときも大丈夫ってことになるのか。

なるほど、なんかわかってきたかも。意外とあっけなく終わっちゃうのかな。

次は $a=3$ だけど、3 の段の○の位置は 2 の段や 1 の段と同じ、1, 2, 3 の列の 3 か所だね。だから $\{b\mid 3\sim b\}$ は $\{b\mid 1\sim b\}$ とかと同じ $\{1,2,3\}$ で、$b\sim c$ となる c としては 1, 2, 3 があり得る。そして $3\sim 1$, $3\sim 2$, $3\sim 3$ だからどの場合でも $a\sim c$ は確かに成り立っている。って感じかな。

1 の段から 3 の段までの 3 段と、1 の列から 3 の列までの 3 列に○ばっかり書いてある正方形のところがあるから、推移律も成り立ったってことなのかな。

……そうすると、4 と 5 の段と列にも正方形があるから、だから大丈夫ってこと？」

「なるほどー、確かにそんな感じかも？」

「でも念のために一つ一つ確認していくと、$a=4$ の $4\sim b$ になるのは $b=4,5$ の 2 つ。どっちの場合も $b\sim c$ になるのは $c=4,5$ だね。$a=5$ のときも $5\sim b$ になるのは $b=4,5$ だから $c=4,5$ だね。a が 4 か 5 で c も 4 か 5 だと、右下の正方形のところだからどの場合も○が付いてる」

ふむ、大丈夫そうだ。○で正方形を形作っているのが同値関係というイメージで間違いなさそうだ。

1.1.10　具体例で考えよう〜グループ分けの２つの表現３〜

「なるほどねー。$\mathcal{A}$ と $\sim$ はこんなふうに行ったり来たりできるんだ。『同値関係と分割は一対一に対応する』か」

同値関係と分割は一対一に対応する。命題 1.1.4 だ。舞ちゃんのつぶやいた本の一節を僕は心の中で反芻していると、ユキがずっと黙っていた補足で説明してくれた。

「一対一に、つまり同値関係のリストと分割のリストの間にもれなく、重複なく対応が付けられるということだね。

$\overset{5\text{点集合}}{A=\{1,2,3,4,5\}}$ の場合だとさっきの $\overset{1,2,3\text{と}4,5\text{に分ける方法}}{\mathcal{A}=\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}}$ の他にも

$$\overset{1,2,4\text{と}3,5\text{に分けるの}}{\{\{1,2,4\},\{3,5\}\}}$$

とか

$$\overset{1\text{だけのグループ、}2,3\text{のグループと}4,5\text{のグループみたいな分け方}}{\{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}}$$

とか

$$\overset{3\text{と}4\text{だけが一緒で他が全部バラバラの}}{\{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5\}\}}$$

とか……他にもいろいろあるけど、そういう分割の一つ一つに何(なに)か一つの同値関係が対応するのね。そして逆もまたしかり、なの」

と言われても、$\mathcal{A}$ みたいに 3 つと 2 つに分かれるだけでもかなりの数がありそうだし、それ以外にもどれだけあるのかいまいち想像できない。

対応の様子を見てみたかったが、ちょっと多すぎてこんがらがってしまいそうだな。うーん、こういうときは……あ、そうだ。

「どんな感じに対応してるのかさ、もっと要素が少ない集合で考えてみない？」

単純なものから考えて複雑なものへ。思考整理の基本の一つである。分割の数がごちゃごちゃと多くなるのは、もとの集合を小さくしておけば回避できるんじゃないだろうか。

「要素が少ないって、3 個とか 4 個とか、ってこと？」
「そうだね。でも思い切ってもっと減らして、1 個とか 2 個とか」
舞ちゃんはうーん、と指をあごに添えて首をかしげる。何か思考するように少し動きを止めた後、
「そうだね。やってみようか。でも集合の要素が 1 個だと同値関係も分割も 1 つしかないからあっという間だよ」
そう言ってさらりと書き記す。

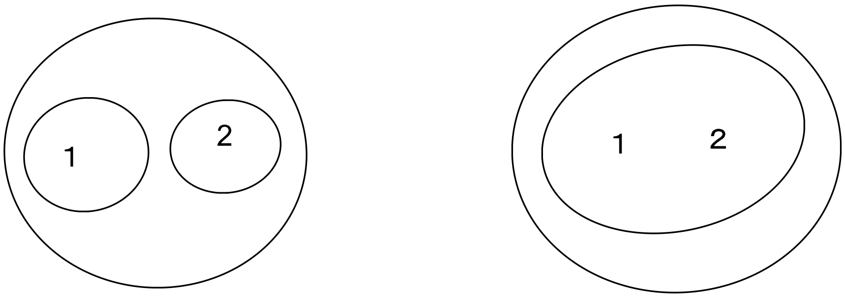
$A = \{1\}$ の場合

分割：$\{\{1\}\}$

同値関係

	1
1	○

「ふーむ。$\overset{\text{1だけの集合}}{A = \{1\}}$ の部分集合で 1 を含むのは $\overset{\text{全体}}{\{1\}}$ しかない。そして $\{1\}$ だけで A の全ての要素を網羅してるから $\{\{1\}\}$ が分割になる。$\overset{\text{それ}}{\{1\}}$ 以外の部分集合は $\overset{\text{空集合}}{\emptyset}$ しかないから、これ以外に分割はあり得ない、ってことか。
同値関係の方は、一つしかないマスに○を入れるか×を入れるかだけど、×だと $\overset{\text{反射律}}{1 \sim 1}$ が成り立たなくなるから、○が入るしかないと」
「そうそう！」
「なるほど。確かにあっという間に終わっちゃった」
これだと要素が増えるとどんなふうになるのかはよくわからないね、とつぶやくと、
「確かに $\overset{\text{この命題}}{\text{命題}}$1.1.4の典型的なイメージとはかけ離れてるね。でも簡単なところから順番に考えていく方が混乱しなくて良いんじゃないかな。ウォーミングアップも兼ねてね。それに、例外的な状況もきちんと考えるのは論理の訓練にもなるし」
というのがユキの答え。耳元でしゃべられると若干くすぐったい。
ふむ、そういうものか……確かにそうなのかもしれないな。
舞ちゃんはちらりとユキを見やり、手元に視線を戻して続ける。
「じゃあ次は $\overset{\text{要素が2つの場合}}{A = \{1, 2\}}$ だね。ぱっと思いつくのはこういうのと、」
と $1, 2$ を囲む大きな丸の内側に 1 のみを囲む丸と 2 のみを囲む丸を描き、
「こういうのがあるね」
$1, 2$ と書いてそれを大きく丸で囲み、その内側に小さめに 1 と 2 の両方を囲む丸を描き込む。



ふむ。1 と 2 が分かれる場合と分かれない場合。その 2 通りか。

「これで全部？」

多分そうだろうなと思ったが、念のために確認しようと訊いてみる。

「そうじゃない？」

きょとんとしてる舞ちゃん。

最初くらいはできるだけ慎重にいきたい。本に書いてある条件を確認しながら話を進めていく。

「えーっと、分割 $\overset{\text{全体が入ってくる分割は}}{\mathcal{A} \text{ が } A \in \mathcal{A}}$ をみたすと、$\overset{\text{他のグループ}}{B \in \mathcal{A}, B \neq A}$ があるとすると分割の条件から $\overset{\text{それは全体集合}A\text{の部分集合}}{B \subsetneq A}$ で、最後の条件から $\overset{\text{空集合じゃない}}{B \neq \emptyset}$。つまり $\overset{\text{1 か 2 はメンバー}}{1 \in B \text{ か } 2 \in B}$ なんだけど、1 がメンバーなら

$$\overset{\text{1 が入るグループが 2 つあること}}{1 \in B, 1 \in A,\ B, A \in \mathcal{A}}$$

になっちゃうね。だからダメ。

$2 \in B$ でも同じ理由で 2 が 2 つのグループに入るからダメ、と。つまり $\overset{A\text{ 以外のグループ}}{B \neq A}$ となる $B \in \mathcal{A}$ は存在しない。だから $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}\}$ になるんだね」

うんうん、と舞ちゃんがうなずいてくれたのを確認して続ける。

「で、$\overset{\text{全体集合が含まれない}}{A \notin \mathcal{A}}$ の場合だけど、今度は $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}\}$ になるのかな？　うーん……まず $\overset{\text{2つ目の条件}}{\text{(p2)}}$ を見ると $\overset{\text{1 が所属するグループ}}{1 \in B \text{ になる } B \in \mathcal{A}}$ があるわけだけど、$\overset{A\text{ じゃない}}{A \notin \mathcal{A} \text{ だ}}$ から $\overset{\text{1だけのグループ}}{B = \{1\}}$ しかないね。つまり $\{1\} = B \in \mathcal{A}$、同じように $\{2\} \in \mathcal{A}$ だね。

つまり $\{\{1\}, \{2\}\} \subset \mathcal{A}$ にならなきゃいけないのか」

「うんうん。だから $\overset{\text{この絵}}{\{\{1\}, \{2\}\}}$ みたいな分割になるんだよ」

「$\{1\}$ と $\{2\}$ が入るってことがわかって、他に集合ないかってこと、つまり

$$\overset{\text{1 だけとも 2 だけとも違う集合}}{X \in \mathcal{A}, X \neq \{1\}, X \neq \{2\}}$$

が本当にないのかがまだわかってないけど…… $\overset{\text{分割の最後の条件}}{\text{(p3)}}$ から $\overset{\text{空集合じゃない}}{X \neq \emptyset \text{ だ}}$ し、もし $\overset{\text{1がメンバー}}{1 \in X}$ なら $1 \in X, 1 \in \{1\}$ で $\overset{\text{1 を含む集合}}{1 \in Y,\ Y \in \mathcal{A}}$ になる集合が 2 つあるから $\overset{\text{2つ目の条件}}{\text{(p2)}}$ が成り立たなくてダメってことかな。$2 \in X$ でも同じようにダメ。

なるほど、$\overset{\text{3 つの条件}}{\text{(p1),(p2),(p3)}}$をきちんと使えば確かに $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}\}$ になるんだ」

僕は舞ちゃんが描いた 2 つの分割を表す図の横に

$$\mathcal{A}_1 = \{\{1, 2\}\}$$
$$\mathcal{A}_2 = \{\{1\}, \{2\}\}$$

と書き加えた。

「うんうん！」

「同値関係はどうなんだろ？　縦横それぞれ 1 と 2 の 2 つの列がある表を○(まる)と×(ばつ)で埋めるわけだけど、$\overset{\text{左上からの対角線}}{(1, 1) \text{ と } (2, 2)}$ は反射律から○を入れなきゃいけない、のか」

「うんうん、そうだね！」

「えーっと、$\overset{\text{残った 2 マス}}{(1, 2) \text{ と } (2, 1)}$ は……そうか、対称律があるからどっちかが○なら両方○になるんだね。つまり両方○か、両方×。その 2 通りがあるわけだ」

$2 \sim 1$ の場合。

$\sim_1$	1	2
1	○	○
2	○	○

$2 \not\sim 1$ の場合。

$\sim_2$	1	2
1	○	×
2	×	○

「……ってことは、これで全部なのかな」

「そうそう！　$\mathcal{A}_1$ は $\sim_1$ と、$\mathcal{A}_2$ は $\sim_2$ と対応してるんだよ」

表と絵を交互に指さす舞ちゃん。

「そうなの？」

分割も同値関係も 2 つだから、確かにそうなっててもおかしくはなさそうだが。

「えっとね、$\sim_1$ に対応する分割は $1/{\sim_1}$ と $2/{\sim_1}$ を集めたものだよね。で、それぞれ

$$1/{\sim_1} = \{a \in A \mid a \sim_1 1\} = \{1, 2\}, \qquad 2/{\sim_1} = \{a \in A \mid a \sim_1 2\} = \{1, 2\}$$

だから、

$$A/{\sim_1} = \{1/{\sim_1}, 2/{\sim_1}\} = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}\} = \{\{1, 2\}\} = \mathcal{A}_1$$

になるんだよ」

「あ、なるほど、確かに」

「同じように $\sim_2$ の分割は

$$1/{\sim_2} = \{a \in A \mid a \sim_2 1\} = \{1\}, \qquad 2/{\sim_2} = \{a \in A \mid a \sim_2 2\} = \{2\}$$

だから

$$A/{\sim_2} = \{1/{\sim_2}, 2/{\sim_2}\} = \{\{1\}, \{2\}\} = \mathcal{A}_2$$

だね」

ふむ。同値関係から分割を作るのはこういうふうになっているのか。うーん、習うより慣れろというやつだろうか。まだまだ一般的な形での理解が得られたとは言い難い。だがこうやって具体例を見ていると、少しずつだがなんとなく感覚がつかめてくるような気がした。

「逆に分割から同値関係への対応はどうなるんだろう。$\mathcal{A}_1$ に対応する $\overset{\text{なみじるし}}{\sim}$ は、1 の入ってる同値類には $\overset{\text{1と2が入ってる}}{\{1, 2\}}$ だから $1 \sim 1$, $2 \sim 1$ になって、2 の同値類も $\overset{\text{同　じ}}{\{1, 2\}}$ だから $1 \sim 2$, $2 \sim 2$ になるのか」

$\mathcal{A}_1$ に対応する同値関係の定義に戻れば

$$a \sim b \iff a, b \in X \text{ となる } X \in \mathcal{A}_1 \text{ が存在する}$$

だから、$a = b = 1$ のときは $X = \{1, 2\}$ がそれ、$a = 1, b = 2$ の場合にも $X = \{1, 2\}$ とすればいい。$a = 2, b = 1$ のときも $a = b = 2$ のときも同じだ。

a	a の同値類	b	b の同値類	同値類は同じか	$a \sim b$ か
1	$\{1, 2\}$	1	$\{1, 2\}$	同じ	$1 \sim 1$
1	$\{1, 2\}$	2	$\{1, 2\}$	同じ	$1 \sim 2$
2	$\{1, 2\}$	1	$\{1, 2\}$	同じ	$2 \sim 1$
2	$\{1, 2\}$	2	$\{1, 2\}$	同じ	$2 \sim 2$

つまり $\sim$ の表を作ると全部〇ばっかりになるわけだから、結局 $\overset{\text{〜は表の}\sim_1\text{と同じ}}{\sim = \sim_1}$ になるわけか。

「$\mathcal{A}_2$ の方は、」

a	a の同値類	b	b の同値類	同値類は同じか	$a \sim b$ か
1	$\{1\}$	1	$\{1\}$	同じ	$1 \sim 1$
1	$\{1\}$	2	$\{2\}$	違う	$1 \not\sim 2$
2	$\{2\}$	1	$\{1\}$	違う	$2 \not\sim 1$
2	$\{2\}$	2	$\{2\}$	同じ	$2 \sim 2$

「ってことになって、$\sim_2$ になるんだ」

……なるほど。確かにこんな感じの対応になる。

分割 ↔ 同値関係

$\{\{1,2\}\}$ $\longleftrightarrow$

	1	2
1	○	○
2	○	○

$\{\{1\},\{2\}\}$ $\longleftrightarrow$

	1	2
1	○	×
2	×	○

「よし、じゃあ次、要素が 3 つの集合に進もうか。うーんと、分割は……みんな一緒、一つだけ別、一つずつバラバラ、の 3 種類かな？」

「そうだねー、つまりこんな感じ」

$\{1,2,3\}$	全部一緒
$\{\{1\},\{2,3\}\}$ $\{\{2\},\{1,3\}\}$ $\{\{3\},\{1,2\}\}$	1 つだけ仲間はずれ
$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$	みんなバラバラ

確かにそうだな。バラバラや全部一緒のは一通りしかなくて、仲間はずれがある場合は $1,2,3$ のどれがはずされるか 3 種類。

「対応する同値関係はどうなってるんだろ。2 つのときと同じように 1 段ずつ見てけば良いかな。

「1 が入る同値類は $\{1\}$ だから、1 の段は 1 だけが○で他が×だね」

$\{\{1\},\{2,3\}\}$ $\longleftrightarrow$

	1	2	3
1	○	×	×
2			
3			

「で、2 の属する同値類は $\{2,3\}$ だから 2 の段は $2,3$ が○で、他が×、つまりこうなる」

$\{\{1\},\{2,3\}\}$ $\longleftrightarrow$

	1	2	3
1	○	×	×
2	×	○	○
3			

「そして 3 が入るのは、2 の同値類と同じ $\{2,3\}$ だから 3 の段は 2 の段と同じなわけだ。つまりこういう表になるんだね」

$\{\{1\},\{2,3\}\}$ $\longleftrightarrow$

	1	2	3
1	○	×	×
2	×	○	○
3	×	○	○

「うんうん！」

「同じように他の分割についても表を書いていけば……こうかな？」

分割　　同値関係　　分割　　同値関係

$\{\{1,2,3\}\}$ $\longleftrightarrow$

	1	2	3
1	○	○	○
2	○	○	○
3	○	○	○

$\{\{1\},\{2,3\}\}$ $\longleftrightarrow$

	1	2	3
1	○	×	×
2	×	○	○
3	×	○	○

$\{\{2\},\{1,3\}\}$ $\longleftrightarrow$

	1	2	3
1	○	×	○
2	×	○	×
3	○	×	○

$\{\{3\},\{1,2\}\}$ $\longleftrightarrow$

	1	2	3
1	○	○	×
2	○	○	×
3	×	×	○

$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ $\longleftrightarrow$

	1	2	3
1	○	×	×
2	×	○	×
3	×	×	○

「$\{\{2\},\{1,3\}\}$（2だけ仲間はずれだと）の同値関係は○が正方形のかたまりにはならない……？」

「そうだね。えっと、この表だと同じグループの 1 と 3 の間に、別のグループの 2 が割り込んできてるよね。1, 3, 2 みたいにグループ毎にまとめた順番に書いて表を作れば

	1	3	2
1	○	○	×
3	○	○	×
2	×	×	○

というふうに $\{1,3\}$ のところの大きな正方形と $\{2\}$ のところの小さな正方形が並ぶよね」

「ああ、なるほど」

1 と 3 のところに○が付いて、3 と 1 のところにも○が付いてる。だから表の縦と横の並びを変えても $\{\{1,3\},\{2\}\}$ に対応する同値関係を表してることに変わりはないと。

「こんなふうに書いたらもっとわかりやすいかな」

	1 3	2
1 3	○	×
2	×	○

ああ、そうか。同じグループのところは全部○になるか全部×になるかだから、区切りがそもそも必要ないのか。

同値関係の表は正方形に○がいくつか並んだものという表現は正確ではなくて、同じグループになるものを隣り合わせにして表を書けば左上から右下まで正方形のかたまりがいくつか並んだ表になる、と。

「ということは、もっと大きな集合でも同じように対角線に○が並ぶのかな、こんな感じに」

分割 同値関係

$$\{\{1,3,5\},\{2,6\},\{4\}\} \longleftrightarrow$$

	1 3 5	2 6	4
1 3 5	○	×	×
2 6	×	○	×
4	×	×	○

「そうそう。そんなふうになるの」

1.1.11 一つずつ読み進めよう・前編

「これで 3 つの要素を持つ集合の場合は終わりか。なんとなく雰囲気はわかってきたかも。順番に行けば次は 4 つになるわけだけど、分割がいっぱいありそうで、わけがわからなくなりそう」

「そうだね。分割を挙げるだけならできるとは思うけど、雰囲気をつかむための具体例だからね。そろそろ証明を読んでみたら良いんじゃないかな」

そう言って僕に体重をかけるのをやめて隣の椅子に腰を下ろすユキ。さすがにずっともたれかかってるのはしんどいか。

元々の目的は定理を理解すること。どういうことを主張しているのか、そして何故成り立つのか。小さい集合の場合に分割と同値関係がどんなふうに対応してるかを観たのは、定理のイメージをつかむためだったわけで、そろそろ成り立つ理由である証明解読に移るべきだと、ユキはそう言っているのだ。

提案にしたがい、僕は改めて本を手に取ってくだんの証明のページを開いた。

(1) $\sim$ を集合 A の同値関係とし、$\mathcal{A} = \{a/\sim \mid a \in A\}$ が A の分割であることを示そう。

まず定義から、全ての $a \in A$ に対し $a/\sim \subseteq A$ であるから (p1) はよい。

$a \in A$ に対し $a \in a/\sim$, $a/\sim \in \mathcal{A}$ であるから $a/\sim \neq \emptyset$, すなわち (p3) も成り立つ。

(p2) が成り立つことを示そう。$a \in A$ に対し、$a \in B$, $B \in \mathcal{A}$ となる B が存在することは、$a \in a/\sim, a/\sim \in \mathcal{A}$ だから $B = a/\sim$ とすればよい。

$a \in B$, $a \in C$, $B, C \in \mathcal{A}$ としよう。

$b/\sim = B$, $c/\sim = C$ となる $b, c \in A$ がとれる。$a \in B$, $a \in C$ であるから $b \sim a$, $c \sim a$ となる。$\sim$ が対称律と推移律をみたすことより $b \sim c$ が成り立つ。

　このことと $\sim$ が同値関係であることより、$x \in A$ に対し

$$x \in B \iff b \sim x \iff c \sim x \iff x \in C$$

となる。すなわち $B = C$ が成り立つ。

「すなわち……すなわち？」

即ち、則ち、輒ち、乃ち。数学で使う場合は大体「つまり」とか「言い換えると」とかそういう意味なのだそうだ。漢字を当てるとすれば「則ち」か。

まあ言葉遣いは置いといて……

「同値関係から作った集合が分割になっていることの証明だな。えっと、分割の条件は……」

［ (p1)　全ての $B \in \mathcal{A}$ は A の部分集合である。］

［ (p2)　全ての $a \in A$ に対し $a \in B$ となる $B \in \mathcal{A}$ が唯一つ存在する。］

［ (p3)　$\emptyset \notin \mathcal{A}$］

「$\mathcal{A} = \{a/\sim \mid a \in A\}$（つくったもの）がこの 3 つの条件を全部みたしてることを順番に確かめていってるのかな」

こくり、とうなずくユキ。

「まず 2 行目。$\mathcal{A}$ の要素は全部 $a/\sim$ の形で、$a/\sim \subseteq A$ だから (p1) は大丈夫ってことか。

3 行目は (p3) の証明だね。$a/\sim \neq \emptyset$（空集合じゃなきゃ）なら 良いわけだけど、$a \in a/\sim$（a が要素）だから問題ない、と。

4 行目からの 8 行は……これ、全部 (p2) の証明なの？」

「そうだね」

「$a \in A$ に対して $a \in B$ になる $B \in \mathcal{A}$ がちょうど一つあれば良いんだね。えーっと……なんかごちゃごちゃしてるな。どうなってるんだろう」

「んと、2 つの部分に分かれてるんだね。1 つ目が存在証明、4 行目と 5 行目だね。もう一つは一意性証明、6 行目から先の 6 行の文章ね」

存在証明と一意性証明……。

「1 つ目は $a \in B$ となる $B \in \mathcal{A}$（a が入る集合）が少なくとも一つ存在するってことだね。

2 つ目は $a \in B$ となる $B \in \mathcal{A}$（そういう集合）が二つ以上はないってことを示してるの。これを合わせて、ちょうど 1 つってことの証明になるのね」

「……？」

「えっと、二つ以上ないってことは、条件をみたす B と C（別々に持ってきたもの）がどっちも実は同じものでしかあり得ない、っていう形に数学では言い換えるんだよ」

ほお。

「一つはあるってことを存在、二つ以上はないってことを（条件をみたすものの）一意性っていうの」

ふむ、存在と一意性。あるということと、二つ以上はないということ、か。なるほどな。

「一意ってあんまり聞かない言葉だけど、多分『一つだけである』みたいな意味だよね。有無を考えずに『二つ以上はない』ってことだけを考えることもあるの？」

「うーん、あった気がするなあ」

ユキは記憶を探すようにしばしの間を置いて再び口を開いた。

「……どんなのがあったか、パッとは思い出せないなあ。でも文章だと『存在すれば一意』みたいな書き方が多い気がするね。条件の名前としては、二つ以上は存在しないってことだけでも一意性って呼んでる気がするなあ。ちょっと自信はないけど」

「ふむ……なるほど。

と、本の解読に戻ろうか。存在と一意性。その二つを理解できれば良いんだね。

存在の方は…… $\overset{\text{この条件}}{a \in B,\ B \in \mathcal{A}}$ をみたす $\overset{\text{もの}}{B}$ があることを証明したんだね。これは $\overset{a\text{、スラッシュ、なみ}}{B = a/\!\sim}$ が条件をみたしてるからオーケー、と。それだけのことか。

長いのは一意性の方だね。えっと……全体としてやりたいことは B 以外にも条件をみたすものがあれば、B と等しくなる、ってことだよね。んーと、式で書くとこんな感じ？」

$$a \in B, B \in \mathcal{A}, a \in C, C \in \mathcal{A} \implies B = C. \tag{1.1.4}$$

「そうそう」

「とするとスタート地点は $\overset{B\text{ は }a\text{ が要素になって }\mathcal{A}\text{ の要素で、}C\text{ も }a\text{ が要素で }\mathcal{A}\text{ の要素}}{a \in B,\ B \in \mathcal{A},\ a \in C,\ C \in \mathcal{A}}$ ってことか。

$\overset{B\text{ は商集合の要素}}{B \in \mathcal{A} = A/\!\sim}$ なんだから

$$\overset{\text{何か同値類になる}}{B = b/\!\sim \text{ となる } b \in A} \text{ がある}$$

わけで、同じように $\overset{C\text{ も同値類だね}}{C = c/\!\sim}$ となる $c \in A$ もある。

んと、次は……あ、そうか、

$$\overset{a\text{ は }B\text{ の要素だけど、}B\text{ が同値類、つまり }b\text{ と}\sim\text{で結ばれてるものを集めたもの}}{a \in B = b/\!\sim = \{x \in A \mid b \sim a\}}$$

a はその集合に属してるんだから $b \sim a$ なんだね。同じように $c \sim a$ になる。そして $\sim$ が同値関係だから $b \sim a,\ c \sim a$ より $b \sim c$ になる、と」

「うんうん、そういうこと」

「……で、それを使うと、どんな $\overset{A\text{ の要素 }x}{x \in A}$ に対しても

$$\overset{B\text{の要素であることと}C\text{の要素であることが同じ}}{x \in B \iff x \in C}$$

ってことがわかるのか。ああ、なるほど。これは集合として等しいってことだから $B = C$ になるんだ。だからこれで$\overset{\text{さっきの式}}{(1.1.4)}$が証明できたってことだね」

$a \in B, B \in \mathcal{A}, a \in C, C \in \mathcal{A}$ から始めて、$B = C$ にたどり着けた。

ふう、と息を吐き出して改めてノートを眺めてみる。

「はあー、証明ってこういうふうにやるんだねー」

舞ちゃんもほうっと感嘆の息を漏らす。証明解読の間は聞きに徹していたが、どうやら理解はしていたようだ。

「一つ一つは確かに当たり前な理屈を積み重ねていくんだね。まあそりゃそうかって感じだけど、積み上げていく順番が独特というか、なかなか慣れるまで大変そう」

「確かにそうかもね。でも慣れてしまえば、こんな文章もすんなり頭に入ってくるようになるよ」

ユキはそう言うけれど、その感覚は、にわかには信じられなかった。一つ一つ読んでいけば、確かに納得はできるんだけど、ただそれだけだ。

「意外とすぐ慣れると思うよ。こういう解読の積み重ねだよ。気付いたら早く読めるようになってる。数学じゃなくても、言葉ってそういうものだと思うの」

「そんなものかなあ……。まあとりあえず今は、次にいこうか」

(2) $\mathcal{A}$ を集合 A の分割とする。

$\{a, b\} \subseteq B$ となる $B \in \mathcal{A}$ が存在することを $a \sim b$ と表すとき、$\sim$ が A の同値関係となることを示そう。

反射律：$a \in A$ であるから分割の定義より $a \in B$ となる $B \in \mathcal{A}$ が存在する。この B について $\{a, a\} \subseteq B$ が成り立つから $a \sim a$ となる。

対称律：$a \sim b$ は $\{a, b\} \subseteq B$ となる $B \in \mathcal{A}$ が存在することだが、$\{a, b\} = \{b, a\}$ であるから $\{b, a\} \subseteq B$, $B \in \mathcal{A}$ である。よって $b \sim a$ が成り立つ。

推移律 : $\{a,b\} \in B$, $\{b,c\} \in C$ となる $B, C \in \mathcal{A}$ が存在するとする。このとき $b \in B$, $b \in C$ であるから (p2) より $B = C$ となる。$a \in B$, $c \in C = B$ であるから $\{a,c\} \subseteq B$ となり、$a \sim c$ となる。

今度は分割から作った 2 項関係が同値関係であるという証明だ。

$\sim$ が同値関係だというのが証明したいことで、同値関係というのは反射律、対称律、推移律の全てが成り立っているということだった。だからそれを順番に確かめているんだな。反射律と対称律はまあ、そのまだな。

推移律の証明では $b \in B$ と $b \in C$ から $B = C$ という、同値類の一意性を使っているのか。

これはあっけないなあ。

続きを読もうと再び本に目を落とすと、ユキが横からコメントしてくる。

「次がいよいよ分割と同値関係の対応の話だね」

ふむ。ここからが本番、なのだろうか。

1.1.12　一つずつ読み進めよう・後編

(3) $\mathcal{A}$ を A の分割とし、$\sim$ を (2) で定まる A の同値関係とする。

まず $A/{\sim} \subseteq \mathcal{A}$ を示そう。$B \in A/{\sim}$ をとる。すると $b/{\sim} = B$ となる $b \in A$ が存在するが、$\sim$ の定義から $b/{\sim}$ は $B' \ni b, B' \in \mathcal{A}$ となる B' に他ならない。よって $B = B' \in \mathcal{A}$ が成り立つ。

逆に $B \in \mathcal{A}$ とする。このとき $b \in B$ をとると $B = b/{\sim} \in A/{\sim}$ となる。

よって $\mathcal{A} \subseteq A/{\sim}$ も成り立つので $A/{\sim} = \mathcal{A}$ であることが示せた。

「えっと、どういうこと……？」

もう一度ゆっくり、文章を見返す。

$A/{\sim} = \mathcal{A}$ であることが示せた。そう書いてあるんだから、

「ここまでが分割から同値関係を作って、そこからまた分割を再構成したら元に戻るってことの証明になってる……のかな？」

「そうだね。最終目標は $\overset{\text{最後の式}}{A/{\sim} = \mathcal{A}}$ で、それを $\overset{\text{作ったのが元のに含まれてること}}{A/{\sim} \subseteq \mathcal{A}}$ と $\overset{\text{逆の包含関係}}{\mathcal{A} \subseteq A/{\sim}}$ に分解してるのね」

ふむ……？

僕と同じように舞ちゃんも首をかしげている。ユキさん、もうちょっとかみ砕いて説明してください。

「$\overset{\text{2つの集合}}{X, Y}$ が $\overset{\text{等しい}}{X = Y}$ ってことは

$$\overset{X\text{ の要素は }Y\text{ の要素にもなって、逆も成り立つ}}{\text{全ての } x \text{ に対して } x \in X \Longleftrightarrow x \in Y}$$

ってことだったよね。

そして $\overset{\text{部分集合になる}}{X \subseteq Y}$ ってことは

$$\overset{\text{そのうちの一方向だけが成り立つ}}{\text{全ての } x \text{ に対して } x \in X \Longrightarrow x \in Y}$$

ってことだよね。

だから $\overset{\text{等しいってこと}}{X = Y}$ は $\overset{\text{一方がもう一つの部分集合で、逆向きも成り立つ}}{X \subseteq Y \text{ かつ } Y \subseteq X}$ ってことなのね」

ああ、なるほど。つまりこういうことかな。

「$\overset{\text{最後の式}}{A/{\sim} = \mathcal{A}}$ を証明するために $\overset{\text{お互い部分集合になっていること}}{A/{\sim} \subseteq \mathcal{A} \text{ と } \mathcal{A} \subseteq A/{\sim}}$, つまり

$$\begin{aligned} B \in A/{\sim} &\quad\Longrightarrow\quad B \in \mathcal{A} \\ B \in \mathcal{A} &\quad\Longrightarrow\quad B \in A/{\sim} \end{aligned}$$

の２つを証明するんだね。

えーっと、2 行目からの段落が $\overset{\text{1つ目の証明したいこと}}{B \in A/\sim \Rightarrow B \in \mathcal{A}}$ の方で、4 行目からの段落が $\overset{\text{2つ目}}{\mathcal{A} \subseteq A/\sim}$ 、で合ってる？」

「そうそう」

満足げに微笑むユキ。

「ふーん、そういうふうにやるんだ」

舞ちゃんは頬を人差し指でとんとんしながら小刻みにうなずきを繰り返していた。

「よし、じゃあ細かく見てみよう。まず $\overset{\text{前半}}{A/\sim \subseteq \mathcal{A}}$ から。証明したいのは $\overset{\text{これ}}{B \in A/\sim \Rightarrow B \in \mathcal{A}}$ だよね。

えっと、 $\overset{B\text{が}A/\sim\text{に入ってる}}{B \in A/\sim}$ とすると、 $\overset{\text{こういう小文字の}b}{b/\sim = B}$ となる b が存在する……うん、$A/\sim$ は $b/\sim$ の形の集合しか要素にならないからだね。

で、$b/\sim$ は $B' \ni b,\ B' \in \mathcal{A}$ となる B' に他ならない？　どういうことだろ」

「文字通りだよ。 $\overset{B'\text{を}b/\sim\text{に置き換えた式}}{b/\sim \ni b,\ b/\sim \in \mathcal{A}}$ が成り立つでしょ」

「えっと、それもよくわかんないかな」

一番気になったのは『他ならない』という表現だがとりあえず置いておく。

「んとね、まず

$$\overset{B\text{ は }b/\sim\text{ と書けて、}b\text{ はその要素}}{b \in \{x \mid b \sim b\} = b/\sim = B}$$

だよね」

うん、確かに。

「$\sim$ は (2) のやり方で作った同値関係なんだから、$b \in B'$ になる $B' \in \mathcal{A}$ をとると $b \sim x$ は $\{b, x\} \subseteq B'$ と同じことだよね」

んと、(2) のやり方……（※作注 23 ページ）

$$a \sim b \ :\Longleftrightarrow\ a, b \in X \text{ となる } X \in \mathcal{A} \text{ が存在する}$$

X として B' をとって良いのか？　……あ、そうか。これも分割の条件 (2)、一意性か。

「$\mathcal{A}$ は分割だから、 $\overset{b\text{を含むグループ}}{b \in X\ \ X \in \mathcal{A}}$ は一つしかない。X の存在と一意性が成り立ってるのが分割の条件にあったから。で、 $\overset{B'\text{がその条件をみたしてる}}{b \in B' \in \mathcal{A}}$ だ からX $= B'$ になるんだね。だから

$$b, x \in X \text{ となる } X \in \mathcal{A} \text{ が存在する}$$

ってのは $\{b, x\} \subseteq B'$ ってことなんだ」

「うんうん。でね、$\{b, x\} \subseteq B'$ って、実は $x \in B'$ と同じことなんだよね」

「ああ、そりゃそうか」

$\overset{\text{前者}}{b \in B}$ は成り立ってるんだから $x \in B'$ だけを考えれば良い。

「なるほど。てことはこうなるのか」

鉛筆を取り、手元の紙に書き出してみる。

$$\begin{aligned} x \in b/\sim &\Longleftrightarrow b \sim x \\ &\Longleftrightarrow b, x \in B' \\ &\Longleftrightarrow x \in B' \end{aligned}$$

「そうそう！」

「そうか、だから

$$\overset{B\text{が}b/\sim\text{と書けて、}B/\sim\text{は}B'\text{になって、それは}\mathcal{A}\text{に属してる}}{B = b/\sim = B' \in \mathcal{A}}$$

ってことか」

「そういうことだね」

「これでこの文章はオーケーかな。『他ならない』って言葉もよくわからなかったんだけど、B が分割の条件から 1 つだけ決まる B' になる、みたいな意味なのかな」

「うん、多分それであってると思う」

全体としての意図がわかると、細かい表現のニュアンスも不思議と見えてくるものである。

「ありがと、じゃあ続きを読もう」

［よって $B = B' \in \mathcal{A}$ が成り立つ］

「これは今やったことだよね。ああそうか

$$B \in \overset{\text{こ}}{A/{\sim}} \Rightarrow \overset{\text{れ}}{B} \in \mathcal{A}$$

が証明したいことだったけど、$B \in A/{\sim}$ から出発して $B \in \mathcal{A}$ が証明できたんだから、これで前半の目標が達成できてるんだね」

よし、次の段落に行こう。

［逆に $B \in \mathcal{A}$ とする。このとき $b \in B$ をとると $B = b/{\sim} \in A/{\sim}$ となる］

「今度は $B \in \mathcal{A}$ を出発点にして、$B \in A/{\sim}$ を証明したいんだね。んーっと、$\mathcal{A}$ は分割だから (3) から $\overset{B\text{は空集合じゃない}}{B \neq \emptyset}$、だから $\overset{\text{要素}}{b \in B}$ がある。そして $\overset{\text{後ろの式}}{b/{\sim} \in A/{\sim}}$ は $A/{\sim}$ の定義から正しいのかな？　えっと、

$$A/{\sim} := \{a/{\sim} \mid a \in A\} \qquad \text{（作注：商集合の定義。23 ページ）}$$

だから、大丈夫だね。なのであとやらないといけないのは $B = b/{\sim}$ だけか。これができたら $\mathcal{A} \subseteq A/{\sim}$ の証明も終わって、$A/{\sim} = \mathcal{A}$ がわかることになるんだね」

$B = b/{\sim}$ は……さっきやったことかな？　似た記号が何回も出てきて、しかも一回一回微妙に意味が違ったりするから混乱する。今の文章ではどんな定義か、きちんと確かめながら進めなくては。

自分で書き記したメモを見ながら今の状況に当てはめてみる。

「$x \in B$ とすると $\{b, x\} \subseteq B$ になって、それは $b \sim x$ だから $x \in b/{\sim}$ と。うん、B' を B に置き換えたらさっきと同じ式変形ができちゃうね。

$$\begin{aligned} x \in B &\iff b, x \in B \\ &\iff b \sim x \\ &\iff x \in b/{\sim} \end{aligned}$$

だから大丈夫」

うん。ここまでの解読は完了だ！

逆の対応を示そう。$\sim$ を A の同値関係とする。$A/{\sim}$ から (1) の方法で定まる同値関係 $\sim_{A/\sim}$ が $\sim$ に等しいこと、すなわちどんな $a, b \in A$ に対しても

$$a \sim_{A/\sim} b \iff a \sim b$$

となることを示すのが目標である。

だがそれは

$$\begin{aligned} a \sim_{A/\sim} b &\iff \{a, b\} \subseteq B \text{ となる } B \in A/{\sim} \text{ が存在する} \\ &\iff \{a, b\} \subseteq a/{\sim} \\ &\iff a \sim b \end{aligned}$$

となることからわかる。

えっと、今度はなんだ？

［$\sim_{A/\sim}$ が $\sim$ に等しいこと（中略）を示すのが目標である］

ふむ。

「さっきは

$$\begin{array}{ccccc} \text{分割} & & \text{同値関係} & & \text{分割} \\ \mathcal{A} & \longrightarrow & \sim & \longrightarrow & A/\sim \end{array}$$

の流れで分割を再構成したら $\overset{\text{できあがったもの}}{A/\sim}$ が $\overset{\text{もとの分割}}{\mathcal{A}}$ と同じだってことを確かめたんだよね。それと同じように今度は、

$$\begin{array}{ccccc} \text{同値関係} & & \text{分割} & & \text{同値関係} \\ \sim & \longrightarrow & A/\sim & \longrightarrow & \sim_{A/\sim} \end{array}$$

の流れで同値関係を再構成したら $\overset{\text{もとに戻る}}{\sim \text{“=”} \sim_{A/\sim}}$ ってことを証明しようとしてるのかな」

「そうそう」

昨夜（ゆうべ）は全然意味不明だったのに今は何故かわかる。舞ちゃんやユキといろいろやってるうちに僕の中で何かが変わったのだろうか。それとも一晩時間を空けたからだろうか。理由はわからないが、そのことが不思議な喜びを僕にもたらした。

$\sim_{A/\sim}$って見た目はややこしいけど、要は $A/\sim$ を $\mathcal{A}$ と書き直したら分割 $\mathcal{A}$ に対応する同値関係（それを $\sim_{\mathcal{A}}$ と書いてた）ってことだ。日本語だけじゃなくて数式記号も、全体の流れが見えると一つ一つが想像つくようになるものだな。

「$\overset{\text{これ}}{\sim_{\mathcal{A}}}$ と $\overset{\text{これ}}{\sim}$ が等しいってことは

$$\overset{\sim_{\mathcal{A}}\text{が成り立つことと}\sim\text{が成り立つことが同じ}}{a \sim_{\mathcal{A}} b \Longleftrightarrow a \sim b}$$

ってことだよね。そして、それは……」

本の文章をなぞるように手元の紙に条件を変形していく。

$$\begin{array}{lll} & a \sim_{\mathcal{A}} b & \\ \Longleftrightarrow & a, b \in B \text{ となる } B \in \mathcal{A} \text{ がある} & (\sim_{\mathcal{A}} \text{ の定義}) \\ \Longleftrightarrow & a, b \in a/\sim & (a \in B \text{ となる } B \in \mathcal{A} \text{ は } B = a/\sim \text{ しかないので}) \\ \Longleftrightarrow & b \in a/\sim & (a \in a/\sim \text{ なので } b \text{ だけ考えれば良い}) \\ \Longleftrightarrow & a \sim b & (\text{同値類の定義}) \end{array}$$

「こういう感じか」

なるほど。

これで全部終わったのか。確かに、きちんと“ 証明 ”できた気がする。うん。確かに命題 1.1.4 になってる。でも、うーん……。

「なんだろう、一つ一つはわかったけどさ、結局、何をやってるんだろう？」

「分割と同値関係が一対一に対応している、結局はそれだけのことなのね。要素が 3 つの場合には具体的に対応を確かめたよね。あれと同じことが、どんな集合の場合にもできるってこと、それだけなの。

ただ『数学では何よりも理論の厳密性を大事にする』からね。定義に基づいて、当たり前のことを一つ一つ積み重ねるだけでその結論を出せるよってことを確かめたのね。それが証明なの」

同じようにできるということを、当たり前のことを積み重ねることではっきりさせる。ふむ、数学というのはこうやって進めていくものなのか。

数学の本の読み進め方が少し理解できた気がする。
その調子で連休で一気に本を読み進め……なんて、そんなとんとん拍子で進むほど世の中甘くはないけれど、間違いなく一歩前進である。
その後もその本を読み進めて、順序集合なるものの“定義だけは”一応覚えた。そして連休が終わり登校日を迎えるのだった。

公開　初版　2017 年 8 月 28 日　公開

著者　河下希
公開場所　邪道数学研究所
http://cubicsphere.web.fc2.com/index.html