逆ラプラス変換はマクローリン展開である

ラプラス変換の定義式はよく見るが、それがどんなどういうものを表しているのかについての説明は私の今までの人生の中では見かけたことがない。式以上の意味を理解するのがつい最近までできなかったのだが、偶然それらしき解釈を発見したのでまとめてみた。

1　多項式近似再考

$x = 0$ を含む適当な開集合の上で定義された関数 $f(x)$ を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形に表したものを $f(x)$ のマクローリン展開というのであった。

$x = 0$ の近傍に注目するという場合には、定数による近似 a_0, 1 次近似 $a_0 + a_1 x$, 2 次近似 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, ... というように、べき関数の一次結合によって下の関数 $f(x)$ を順次近似していくという発想が根底にある。n の値が大きくなればなるほど x^n は 0 に速く収束するから、低次の項のみを取り出すことが近似になるわけである。

では $f(x) = 2 + x + x^{3/2} - x^2 - x^4$ のような関数の " マクローリン展開 " はどうなるだろうか。もちろん、多少の問題はある。第一に p が非負整数でなければ x の関数 x^p は無限回微分することは不可能であるから、本来の意味でのマクローリン展開は不可能である。もう一つは $x \geq 0$ の範囲でしか $x^{3/2}$ は定義されないという点である。

マクローリン展開という枠組みからは大きく外れるが、それでも 2, $2 + x$, $2 + x + x^{3/2}$, $2 + x + x^{3/2} - x^2$ がそれぞれ $f(x)$ の 0 次近似、1 次近似、1.5 次近似、2 次近似を与えているという言葉には納得してもらえると思う。

このようにべき関数の和によって、関数を順次近似していくという発想は自然なものだろう。つまり整数でない実数べきを含めて、それらの一次結合として関数を

$$f(x) = \sum_{p \in S} a_p x^p$$

と表現したいという願望である。ただしこの方法の場合、$x \in [0, \infty)$ の範囲（$S \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$ なら $x = 0$ も除外される）でのみ意味を持ち、指数としてとり得る値の集合 S は高々可算でなければ右辺は意味を持たなくなる。

定義域が片方だけになる問題はさておき、係数が可算個しかとれないという制約を外そうとすると、当然

$$f(x) = \int a_p x^p dp \tag{1}$$

という積分を考えたくなるだろう。ここで $p \geqq 0$, $x \geqq 0$ の範囲に限定したものが実はラプラス変換とほぼ同じものなのである。

この式とラプラス変換、逆ラプラス変換と関連は後回しにして、関数

$$f(x) = \int_0^{\infty} a_p x^p dp$$

から " p 次成分 " a_p がどのように復元できるのかを考えてみよう。議論の厳密性には全く頓着せずに。

x^p の係数だけが生き残り、その他のべき関数が消える操作と言われて最初に思い至るのは留数定理ではないかと思う。関数 $x^{q-(p+1)}$ の $x = 0$ の周りを 1 周する積分を（p を固定して）q 毎に見てみると、$q = p$ のときは $2\pi i$ となり、$q - p$ がその他の整数なら 0 となる。それ以外の場合には適当な数字になるのだが、$q \neq p$ の場合には $q - p$ の値に応じて適当にぐるぐる回ればそのうち 0 になる。つまり $q \neq p$ なら q に依存

する有界な範囲に留まり続けるのに対し、$q=p$ のときにはどんどん大きくなっていくのである。したがって C で $x=0$ の周りを正の向きに無限に回り続ける曲線 $\mathbb{R} \ni t \mapsto \varepsilon(\cos t + i\sin t) \in \mathbb{C}$ を表すことにすると

$$\begin{aligned}\int_C f(x)x^{-(p+1)}dx &= \int_C \left(\int_0^\infty a_q x^q dq\right) x^{-(p+1)}dx \\ &= \int_0^\infty a_q \left(\int_C x^{q-(p+1)}dx\right) dq \\ &= 2\pi i a_p\end{aligned}$$

のような感じになるだろう。

もちろん、この議論はいろいろ怪しい。元々 $f(x)$ は適当な区間 $x \in [0,\varepsilon)$ の上でのみ定義されていたのに複素積分をどう正当化するかとか、積分の順序交換が許されるかとか、本当に $\int_C x^p dx = 2\pi i\delta(p+1)$ となるかとか。最終的な結論の正当性は（そしておそらくは各段階の議論も？）スタンダードな教科書に書かれているので今回はバッサリ無視しよう。ラプラス変換の値が何を表しているのか全くわからないのでそこに説明を加えたい、というのが今回の目標なのである。

2　ラプラス変換との対応

さて、p, x, a_p をそれぞれ $t, e^{-s}, f(t)$ と置き直そう。すると (1) は

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

という形になる。これは普段見る両側ラプラス変換の式そのものである。$x = e^{-s}$ と置き直すと、x で見たときに原点の周りをぐるぐる回った円 C は s で見ると複素平面を下から上に突っ切る直線 $C' : r + it (t \in \mathbb{R})$ に変わる。

そして

$$\begin{aligned}2\pi i f(t) &= \int_C F(x)x^{-(p+1)}dx \\ &= \int_{C'} F(s)(e^{-s})^{-(t+1)}\frac{dx}{ds}ds \\ &= \int_{C'} F(s)e^{st}ds\end{aligned}$$

となる。この式は逆ラプラス変換に他ならない。

3　結び

- 2017 年 1 月時点で [1]（2 母関数との関係）にて $e^{-s} = x$ と置き直すとべき級数の形になるというコメントが見られた。

  原理的にはその対応関係さえあれば今回のノートの解釈は全て復元できるので、その意味では知られていることと言って差し支えない。

  ウィキペディアは辞書であるからそこ止まりの記述でも十分であると思うが、教科書においては直観的な説明として今回書いた程度のことがラプラス変換の章の始めに書かれているくらいに普及していても良いように思う。

また $x = e^{-s}$ と変換した後の形が普及しているからにはこの形の直接的な意味づけがあるのではないかと思われるが、そこについては現時点の私には不明である。情報をお寄せいただきたい。

- ラプラス変換はフーリエ変換の類似で、変換後の関数の値は“ 周波数成分のようなもの ”などとよく言われるが、結局その言明はよくわからない。わからないというか、嘘なのではないかという認識を今回の考察でかえって強めた。

  何か適当な全単射があって有用な計算規則があれば、変換後の対象についての操作を施した後に逆変換を行えるというのは一般的な事実である。そのような性質を持つものに対して、変換後の関数の値は全て周波数っぽいと認識できるであろうか。無理だろう。周波数という呼称が適切な境界がどこにあるのかは定かではないが、少なくとも恒等変換の場合にはそれはあまりにもおかしな名付け方だろう。

  ラプラス変換も関数空間から関数空間への全単射であるという以上にフーリエ変換と共通点を持つわけではないのに、無理に喩えたために“ 周波数成分のようなもの ”という表現が後から来たのではないかと考えるがいかがであろうか？

参考文献

[1] ラプラス変換, https://ja.wikipedia.org/wiki/ラプラス変換

公開	初版	2017 年 2 月 5 日　公開
	第 2 版	2017 年 9 月 24 日　公開
著者	河下希	
公開場所	邪道数学研究所	
	http://cubicsphere.web.fc2.com/index.html	