# 内積って何ですか？

## 1 前書き

高等学校において数ベクトル空間を習う。そこではベクトルは幾何学的な対象として導入される。そしてベクトルの単元において「内積」という概念が登場する。

$$x \cdot y := |x||y| \cos\theta$$

ただし $\theta$ は $x$ と $y$ をはさむ角度とする。多くの人はこの定義に非常に奇妙なものを感じるであろう。幾何学的に、内積は二つのベクトルのどのようなものを表しているのであろうか。

この定義の直後に代数的な、と言えばいいのだろうか、ベクトルの成分表示 $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ による別定義

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \tag{1}$$

が紹介される。成分ごとに掛け合わせ（なぜかけ算かは謎）たものを全て足し合わせ（なぜ足し算かは謎）たもの、という定義である。これだけを見ても、やはりなぜこのようなものを考えるのか甚だ謎ではある。

しかし「二つのベクトルが直交している」という幾何学的に重要な条件を、代数的には簡単な (1) という式によって書き表せるのなら $\cdots$ 。意味があるかは微妙だが計算の道具としては有用だし、捨て去るのはもったいないよなぁ。と、多くの人はこの概念についてと無理矢理納得したことと思う。

内積をきちんと、幾何学的にとらえたい。ぶっちゃけると、大変残念ながら納得のできる答えが出せたわけではない。しかし考えるヒントになりうる事項はいくつかあり、それを私なりにまとめてみたのがこのノートである。

## 2 正定値双線形形式と双対空間への同型

まず指摘しておくべきことは、周知の事実ではあろうがベクトル空間に付加的な構造として与えた内積 = 正値双線形形式は、双対空間との間の同型写像によりとらえ直すことができるという事実である。

**定義 2.1.** $\mathbb{R}$ ベクトル空間 $V$ に対し、本ノートでは $\mathrm{PB}(V)$ で $V$ 上の正定値双線形形式の全体を表す。また $V^*$ で $\mathbb{R}$ 線形写像 $V \to \mathbb{R}$ の全体を表し、これを成分ごとの演算により $\mathbb{R}$ ベクトル空間とみなす。本ノートでは $\mathbb{R}$ ベクトル空間 $V, W$ に対し $\mathrm{Iso}(V, W)$ で $V$ から $W$ への同型写像の全体を表すことにする。

**定理 2.2.** $V$ を有限次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間とする。このとき次で与えられる $f \in \mathrm{Iso}(V, V^*)$ に対し

$$(P(f))(x, y) := (f(x))(y)$$

と定めると $f \mapsto P(f)$ は $\mathrm{Iso}(V, V^*)$ から $\mathrm{PB}(V)$ への全単射となる。

逆写像は次のように与えられる : $p \in \mathrm{PB}(V)$ に対し $p$ に関する正規直交基底 $(x_1, \ldots, x_d)$（ただし $d = \dim_R(V)$）、すなわち $p(x_i, x_j) = \delta_{ij}$ となる $V$ の基底をとり

$$\left( (F(p)) \left( \sum_{i=1}^{d} a_i x_i \right) \right) \left( \sum_{j=1}^{d} b_j x_j \right) := \sum_{i=1}^{d} a_i b_i$$

と定める。すると $F$ が $P$ の逆写像になるのであった。

この定理により、内積は双対空間というものを通じて理解することができる可能性が示唆される。

## 3 座標関数

双対空間を幾何学的に理解することができるのかは正直分からない。だが少なくとも双対空間の要素については充分幾何学的な理解ができると言って差し支えないと個人的には思っている。そこを説明しよう。

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^d$ とその標準基底 $(e_1, \ldots, e_d)$ を考えよう。$\mathbb{R}^d$ には通常の内積の構造が付加されているとする。“内積”の幾何学的なイメージを浮き彫りにするため、式 (1) で定義される量と対比しながら双対空間の要素を見ていこう。

$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ と表すと $[x \mapsto x_1] \in V^*$ である。$x_1$ は $x$ の何を表しているであろうか？

そう、“$x$ の第一成分”である。同じことであるがもう少しかみ砕くと「ベクトル $x$ が $e_1$ 方向にどれだけ進んでいるか」を表す量が $x_1 = e_1 \cdot x$ である。

今は標準基底を考えたが、同じ描像は一般の正規直交基底 $(p_1, \ldots, p_d)$ に対しても可能かと思う。すなわち $x = a_1p_1 + \cdots + a_dp_d$ に対して $a_1 = p_1 \cdot x$ を「$x$ が $p_1$ 方向にどれだけ進んでいるか」を表す量と言うことができるだろう。

$x \cdot p_1$ には正規直交基底の残りの要素 $p_2, \ldots, p_d$ が現れていない。なので長さ 1 のベクトル $p$ に対し、$[x \mapsto x \cdot p] \in V^*$ を「$x$ の $p$ 方向への進み具合を取り出す関数」と言い表すことができる。

では長さが 1 でない場合にはどうであろうか。

正規直交基底 $(p_1, \ldots, p_d)$ を取るということは $p_1$ 等の向いている方向を基準方向として定めるということ [1] と、$p_1$ の長さを、長さの単位として定めるということを意味しているように思う。

言うまでもないことのような気もするが、リアルな空間では「反対方向」のなす角度の半分として「直角」という概念は絶対的なものと言えるだろう。一方で長さの値は基準となる長さを決めて初めて決まるものである。任意のベクトルを基底の一次結合として表すということは、その基底を基準にして世界をとらえようという気持ちの現れであり、基底を構成するベクトルの長さを単位長とするのは自然なことと思われる。

さて $p$ を 0 でないベクトルとし、$p' = (1/|p|)p$ とおく。すると $p$ を単位長として見たときの $x = ap + q$,（ただし $q$ は $q \cdot p_1 = 0$ なるベクトル）の $p$ 方向の長さ $a$ と、$p'$ を単位長としてみたときの $p'$ 方向（これは $p$ 方向と同じである）の長さ $a'$ との間には $a' = |p|a$ という関係がある。

すなわち単位長の基準ベクトルを $k$ 倍すると、各ベクトルの長さの値は $1/k$ 倍されるのである。まあ当たり前のことではあるが。

これは困った。$x \cdot p$ を「$x$ の $p$ 方向の長さ」と考えると、内積は長さの基準の成分に関して線形ではなく $kp \cdot x = (p \cdot x)/k$ となってしまう。この方針で内積にたどり着くのは困難のようである。

## 4 斜行座標系

前節では直交座標系を出発点にし、一つの座標値は基底の他の要素のとり方に依らないことから、結局は一つのベクトルの方向への射影という考え方に至った。

その考察を頭の中から一度消し去り、本節ではもう一度定理 2.2 を別の視点から眺め直してみよう。

先にいっておくが、本節でもまともな結論には到達しない。数学的な内容としては結局のところ、幾何学的な感覚というよりは代数的な感覚のものを、ムリヤリ幾何学的に納得しようというごり押しで終わってしまうのである。

定理 2.2 は内積の構造がないベクトル空間を議論の土台に置き、そこに計量構造をどのように入れうるか、という発想であった。

内積のないベクトル空間なら全ての基底は対等である。抽象ベクトル空間として考えた方がすっきりと見れると思うので、$d$ 次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間 $V$ と $V$ の基底 $(p_1, \ldots, p_d)$ を考えることにする。

[1] これは南北と東西を意識して地図を書くというようなことと対応しているだろう。

計量構造もとりさったため基底の直交性や各ベクトルのアプリオリな長さの概念がなくなったが、前節同様に $x \in V$ を $x = a_1 p_1 + \cdots + a_d p_d$ と表したときの $a_i$ を「$p_i$ 方向への進み具合」と見ることは自然な発想だろう。

だが直交座標を用いた場合と異なり、この表現は適切ではない。というのは係数 $a_i$ は $p_i$ のみならず、基底の他の要素にも依存するからである。というより他の要素にこそ依存するという方が適切である。

第二成分以降も考え方は同様であるので、（記述を簡略化するため）以下では基底が定める「第一成分の方向」についてのみ考察をする。

**記号 4.1.** $V$ を $d$ 次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間、$P = (p_1, \ldots, p_d)$ を $V$ の基底とする。$x \in V$ に対し $\pi_P(x)$ を $x = a_1 p_1 + \cdots + a_d p_d$ と表したときの $a_1$ と定める。

$\pi_P(x)$ がベクトル $x$ の基底 $P$ による第一成分である。容易にわかるように $\pi_P \in V^*$ である。

**定理 4.2.** $V$ を $d$ 次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間、$P = (p_1, \ldots, p_d), Q = (q_1, \ldots, q_d)$ をそれぞれ $V$ の基底とする。

1. $\mathrm{Ker}\ (\pi_P) = \{a_1 p_1 + \cdots + a_d p_d \mid a_1 = 0\}$ は $p_2, \ldots, p_d$ の張るベクトル空間である。特に $p_2, \ldots, p_d$ にのみ依存し $p_1$ には依存しない。

2. $\pi_P = \pi_Q$ となるための必要十分条件は、$\mathrm{Ker}\ \pi_P = \mathrm{Ker}\ \pi_Q$ かつ $(p_1 - q_1) \in \mathrm{Ker}\ \pi_P$ となることである。

$\mathrm{Ker}\ \pi_P = \mathrm{Ker}\ \pi_Q$ は $(p_2, \ldots, p_d)$ の張る部分ベクトル空間が $(q_2, \ldots, q_d)$ の張る部分ベクトル空間に一致することを意味する。

また $(p_1 - q_1) \in \mathrm{Ker}\ \pi_P$ は $q_1 = p_1 + y$ となる $y \in \mathrm{Ker}\ \pi_P$ が存在することである。これはかみ砕いた表現をするなら $p_1$ を（$P$ による）座標の値を変えないように平行移動することで $q_1$ に到達できる、となるだろう。すなわち $\pi_P$ の値により等高面が $V$ の中に引けるが、$p_1$ と $q_1$ とが同じ高さの面の中にあるということである。（これは写像 $\pi_P : V \to \mathbb{R}$ のグラフ $V \times \mathbb{R}$ を念頭に置いた表現である。）

つまり座標関数とは等高面の引き方、より正確には $V$ の中に傾斜を入れる方法、のことなのである。

では二つの基底 $P$ と $Q$ があったときに、$P$ による傾斜の入れ方と $Q$ による傾斜の入れ方の“和”なるものの自然な定義はどんなものであろうか。（そもそもそういうものがあるのだろうか。）

一つの考え方は二つの高さを単純に足したものを和の高さと方法であろう。式で書くと $\pi(x) := \pi_P(x) + \pi_Q(x)$ で定まる関数 $\pi$ を $P$ による $V$ への傾斜の入れ方と $Q$ による傾斜の入れ方の和とするのである。式で書いてしまえば、単に成分ごとに加えるという非常に代数的な操作であるし、加えるという操作に（関数のグラフに対する操作としての）幾何学的な意味があるのかもいまいち分からない。

差を取るならどうであろう。$\pi'(x) := \pi_P(x) - \pi_Q(x)$ で定まる $\pi' : V \to \mathbb{R}$ である。差というのは距離に通じるものがあり、グラフの高低差を見るといえば幾何学的な雰囲気も感じられるような気もしなくはない。

$\pi_0 := \pi_P - \pi_P$ として恒等的に 0 の関数が現れる。これは全体的に平坦な構造を $V$ に入れるということで、基底から定まるものではないが高さを入れるという感覚の特別な場合としては自然なものであろう。差をとるという操作を組み合わせれば $\pi_P - (\pi_0 - \pi_Q)$ として $P$ と $Q$ の和が作れる。組み合わせ方に幾何学的な意味を見出すのは無理かもしれないが、差（には幾何学的に意味があると考えればそれ）を組み合わせて計算に便利、かつ差を復元できるような操作として和を導入するのは自然な発想であると思われる。

和というのが定義されれば自然数倍は自然に定義できるだろう。そして負の数や実数をかけるかけ算を数の場合に考えるのと同じような感覚で、任意実数倍についても自然に導入することはできる。

## 5　双対空間との同型

さて前々節・前節により個々のベクトル空間 $V$ から $\mathbb{R}$ への線形写像の幾何学的な意味は明らかにできたと思う。「○○方向への進み具合を表す量」という見方と「$V$ への傾斜の入れ方」という見方である。また $V^*$ のベクトル空間としての演算を $V$ の幾何という観点から見た意味はこじつけではあるが、まあ明らかにできたということにしておく。

さて、これで内積の幾何学的な意味は明らかにできたと言えるであろうか？いや、まだ不十分である。

全体の流れを振り返ってみよう。有限次元 $V$ と $V^*$ との間に同型写像があれば、そこから定理 2.2 により $V$ の内積が定まるのであった。

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^d$ の場合には標準基底 $(e_1, \ldots, e_d)$ という、いかにも特別な基底があるので、標準基底の双対基底 $e_1^*, \ldots, e_d^* \in (\mathbb{R}^d)^*$ を考えて $\varphi(e_i) = e_i^*$ となる "標準的な" 同型写像 $\varphi \in \mathrm{Iso}(V, V^*)$ を考えることができる。これを経由して内積を

$$x \cdot y := (\varphi(x))y$$

と定めたわけである。

標準基底をとるところはよいだろう。また双対空間の要素はもともと写像 $V \to \mathbb{R}$ であったから、$\varphi$ を考えれば $x \cdot y := (\varphi(x))y$ を考えるのもまた自然であろう。ただ、標準基底 $e_i$ をその双対基底 $e_i^*$ に写すところは良いとしても、それを線形に拡張するということの幾何学的な意味は不明点として残る。

3 節で述べたように、ベクトルを $k$ 倍したときに、対応する関数は $1/k$ 倍する方が幾何学的な意味は自然に理解でき、$k$ 倍するというのは写像が加法と可換になるという代数的な要請にしか見えない。

ここをどう幾何学的に解釈するのか …. 残念ながら何もアイディアはない。

## 6　結論

やっぱりよく分からん。

双対空間の要素についてはそれなりに意味のある幾何学的な解釈はできているかと思う。しかし双対空間の加法を、もとのベクトル空間の幾何学的な構造と結びつけて考える部分で、かなりの妥協をしてしまっている。そして双対空間との間のベクトル空間としての同型写像が何を意味するのか、全く不明である。

とはいえ本ノートに記した迷走の過程でも「二つのベクトルの直交性を簡単な式で書き下すための道具」という理解は上回ることはできたのではないだろうか。

正値対称双線形形式を双対空間に翻訳し、そこを介して理解するというアプローチが正しいのかは分からない。そこを経由するにせよ、全く違う方面からのアプローチにせよ、どなたかがより説得力のある別の説を提唱してくれるのを期待している。

---


| | | |
|---|---|---|
| 公開 | 初版 | 2016 年 1 月 15 日　公開 |
| | 第 3 版 | 2017 年 9 月 24 日　公開 |
| 著者 | 河下希 | |
| 公開場所 | 邪道数学研究所 | |
| | http://cubicsphere.web.fc2.com/index.html | |